FORME HERMITIENNE SUR LE RÉSEAU DE BRIESKORN

EXPOSÉ À NICE, MAI 2006

Claude Sabbah

Introduction

Soit $f : U \to \mathbb{A}^1$ une fonction régulière sur une variété affine lisse U de dimension $n+1$. On suppose f à singularités isolées et modérée (par exemple, un polynôme de Laurent commode et non dégénéré sur le tore $U = (\mathbb{C}^*)^{n+1}$). Le réseau de Brieskorn

$$G_0 = \Omega^{n+1}(U)[z]\big/(zd - df\wedge)\Omega^n(U)[z]$$

est un $\mathbb{C}[z]$-module libre de rang μ (somme des nombre de Milnor) muni d'une connexion avec un pôle double en $z = 0$, définie, par extension grâce à la règle de Leibniz, par la formule

$$\forall \omega \in \Omega^{n+1}(U), \quad z^2\partial_z[\omega] = [f\omega].$$

Le quotient jacobien $\Omega^{n+1}(U)/df \wedge \Omega^n(U) = G_0/zG_0$ est muni d'une forme bilinéaire non dégénérée induite par le résidu :

$$\operatorname{Res}([\omega_1], [\omega_2]) = \sum_{x\in U} \operatorname{res}_x \left[\frac{\omega_1 \wedge \omega_2}{f'_{u_0} \cdots f'_{u_n} du_0 \wedge \cdots \wedge du_n}\right]$$

où $u_0, \dots, u_n$ sont des coordonnées locales en x (seuls les points critiques contribuent à un résidu non nul, de sorte que la somme est finie).

On peut relier cette forme bilinéaire à la dualité de Poincaré dans les fibres de f. Je vais rappeler comment. Soit M le système de Gauss-Manin

$$\Omega^{n+1}(U)[\partial_t]\big/(d - df \wedge \otimes\partial_t)\Omega^n(U)[\partial_t],$$

qui est naturellement un $\mathbb{C}[t]\langle\partial_t\rangle$-module. La dualité de Poincaré dans les fibres de f provient (*via* de Rham) d'un unique morphisme de $\mathbb{C}[t]\langle\partial_t\rangle$-modules, $DM \to M$, si DM désigne le module dual de M. Le noyau et le conoyau de ce morphisme sont chacun isomorphes à une puissance de $\mathbb{C}[t]$. Par transformation de Laplace, on en déduit un isomorphisme $\iota^*G^\vee \to G$, où $G^\vee$ est la connexion méromorphe duale de $G = \mathbb{C}[z,z^{-1}] \otimes_{\mathbb{C}[z]} G_0$. Autrement dit, on a un accouplement $\mathbb{C}[z,z^{-1}]$-linéaire non dégénéré compatible à la connexion ∇ :

$$G \otimes_{\mathbb{C}[z,z^{-1}]} i^*G \longrightarrow \mathbb{C}[z,z^{-1}].$$

Alors (*higher residue pairings*, K. Saito), cet accouplement induit un accouplement $\mathbb{C}[z]$-linéaire non dégénéré compatible à la connexion :

$$(*) \qquad G_0 \otimes_{\mathbb{C}[z]} i^*G_0 \longrightarrow z^{n+1}\mathbb{C}[z].$$

On en déduit, par restriction modulo z, un accouplement $\mathbb{C}$-linéaire non dégénéré

$$\Omega^{n+1}(U)/df \wedge \Omega^n(U) \otimes_{\mathbb{C}} \Omega^{n+1}(U)/df \wedge \Omega^n(U) \longrightarrow \mathbb{C},$$

qui n'est autre que l'accouplement induit par le résidu.

1. Twisteurs

On cherche maintenant à construire un accouplement sesquilinéaire sur $\Omega^{n+1}(U)/df \wedge \Omega^n(U)$, induisant, à l'aide de la dualité par résidu, une structure réelle. La difficulté, si on veut donner un analogue sesquilinéaire de la formule $(*)$, est de trouver un $\mathbb{C}[z]$-module dont la fibre en $z=0$ soit l'espace vectoriel conjugué de $\Omega^{n+1}(U)/df \wedge \Omega^n(U)$, et d'étendre la formule $(*)$.

1.a. Accouplement sesquilinéaire (I). — Au lieu de partir d'un isomorphisme $DM \to M$, on aimerait partir de l'accouplement sesquilinéaire k : $M \otimes_{\mathbb{C}} \overline{M} \to \mathscr{S}'(\mathbb{A}^1)$ (distributions tempérées) « défini » par

$$\forall \omega_1, \omega_2 \in \Omega^{n+1}(U),\ \forall \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{A}^1), \quad \langle k([\omega_1], \overline{[\omega_2]}), \varphi \tfrac{i}{2\pi} dt \wedge d\overline{t}\rangle = \int_U \varphi \circ f \cdot \omega_1 \wedge \overline{\omega}_2.$$

Malheureusement, cette définition n'a pas de sens, car l'intégrale n'est pas bien définie. Mais si tel était le cas, la formule de Stokes nous dirait que l'accouplement k satisfait à

$$\partial_t k(m', \overline{m''}) = k(\partial_t m', \overline{m''}) \quad \text{et} \quad \overline{\partial}_t k(m', \overline{m''}) = k(m', \overline{\partial_t m''}).$$

On note F_t la transformation de Fourier de noyau $\exp(\overline{t\tau} - t\tau)\frac{i}{2\pi} dt \wedge d\overline{t}$, qui est un isomorphisme de $\mathscr{S}'(\mathbb{A}^1)$ sur $\mathscr{S}'(\widehat{\mathbb{A}}^1)$: par définition, si u est une distribution tempérée sur $\mathbb{A}^1$ et ψ une $(1,1)$-forme C^∞ dans la classe de Schwartz sur $\widehat{\mathbb{A}}^1$, on pose

$$\langle F_t u, \psi\rangle = \langle u, (F_\tau \psi)\tfrac{i}{2\pi} dt \wedge d\overline{t}\rangle \quad \text{avec } F_\tau\psi = \int e^{\overline{t\tau} - t\tau}\psi.$$

Alors $F_t \circ k : \widehat{M} \otimes_{\mathbb{C}} \overline{i^*\widehat{M}} \to \mathscr{S}'(\widehat{\mathbb{A}}^1)$ est encore un accouplement sesquilinéaire, et on en déduit un accouplement sesquilinéaire

$$F_t k : G \otimes_{\mathbb{C}} \overline{i^*G} \longrightarrow \mathscr{S}'(\widehat{\mathbb{A}}^{1*}).$$

Deux questions naturelles se posent alors, au vu de la formule $(*)$:

(i) que dire de l'image de $G_0 \otimes_{\mathbb{C}} \overline{i^*G_0}$?

(ii) comment induire un accouplement sesquilinéaire non dégénéré sur le quotient jacobien ?

Je ne vais pas répondre à la première question directement, et je vais d'abord expliquer comment obtenir une réponse à la seconde question. Il faut remarquer que $F_t k$ induit, en restriction au système local $\mathscr{L}$ des sections horizontales de G sur $\widehat{\mathbb{A}}^{1*}$ un accouplement sesquilinéaire

$$(F_t k)_B : \mathscr{L} \otimes_{\mathbb{C}} i^{-1}\overline{\mathscr{L}} \longrightarrow \mathbb{C}_{\widehat{\mathbb{A}}^{1*}}.$$

1.b. Conjugaisons. — Soit c l'application antilinéaire $z \mapsto \overline{z}$ et $\overline{c} : \overline{z} \mapsto z$ sa conjuguée. Si $f(z) = \sum_n a_n z^n$ est un germe de fonction holomorphe de z, alors le germe $\overline{f \circ c(z)}$ est aussi holomorphe et ses coefficients sont conjugués des coefficients de f.

Si $\mathscr{H}$ est un $\mathbb{C}\{z\}$-module libre, je note $\overline{\mathscr{H}}$ le $\mathbb{C}\{\overline{z}\}$-module libre égal à $\mathscr{H}$ comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel et sur lequel l'action de $g \in \mathbb{C}\{\overline{z}\}$ est définie par $g \cdot h = \overline{g}h$. Si on pose $H = \mathscr{H}/z\mathscr{H}$, alors $\overline{\mathscr{H}}/\overline{z}\overline{\mathscr{H}} = \overline{H}$.

D'autre part, $\overline{c}^*\mathscr{H}$ est un $\mathbb{C}\{\overline{z}\}$-module libre, de fibre en 0 égale à H. Par conséquent, $c^*\overline{\mathscr{H}}$ est un $\mathbb{C}\{z\}$-module libre dont la fibre en 0 est $\overline{H}$.

Je considère la variante suivante avec l'application $\sigma : z \mapsto -1/\overline{z}$. Soit Ω_0 un voisinage du disque unité de coordonnée z dans $\mathbb{C}$ et Ω_∞ son inverse dans $\mathbb{P}^1$. Si $\mathscr{H}$ est un $\mathscr{O}_{\Omega_0}$-module libre de fibre H en 0, alors $\sigma^*\overline{\mathscr{H}}$ est un $\mathscr{O}_{\Omega_\infty}$-module libre de fibre $\overline{H}$ en ∞. Je noterai $\sigma^*\overline{\mathscr{H}} = \overline{\overline{\mathscr{H}}}$.

1.c. Accouplement sesquilinéaire (II). — Je noterai $\mathbf{S}$ le cercle unité (globalement invariant par σ). Un accouplement sesquilinéaire C sur $\mathscr{H}$ est une forme linéaire

$$C : \mathscr{H}_{|\mathbf{S}} \otimes_{\mathscr{O}_{|\mathbf{S}}} \overline{\overline{\mathscr{H}_{|\mathbf{S}}}} \longrightarrow \mathscr{O}_{|\mathbf{S}}$$

où l'indice $_{|\mathbf{S}}$ désigne la restriction faisceautique au cercle $\mathbf{S}$. Je dirai que C est non dégénéré si le morphisme induit $\overline{\overline{\mathscr{H}_{|\mathbf{S}}}} \to \mathscr{H}^\vee_{|\mathbf{S}}$ est un isomorphisme. Dans ce cas, je dirai que $(\mathscr{H}, C)$ est un twisteur et je noterai $\widetilde{\mathscr{H}}$ le fibré obtenu par recollement entre $\mathscr{H}^\vee$ et $\overline{\overline{\mathscr{H}}}$ *via* l'isomorphisme induit par C au voisinage de $\mathbf{S}$.

Je dirai que $(\mathscr{H}, C)$ est pur de poids 0 si de plus $\widetilde{\mathscr{H}}$ est trivial. Alors on a un isomorphisme $\overline{H} \xrightarrow{\sim} H^\vee$, et donc une forme sesquilinéaire non dégénérée $h : H \otimes \overline{H} \to \mathbb{C}$. Elle est hermitienne si et seulement si C l'est (au sens $\overline{\overline{}}$). Je dirai alors que $(\mathscr{H}, C)$ est polarisé si de plus h est définie positive.

Proposition. — *Soit $(\mathscr{H}, C)$ un twisteur hermitien. Alors $(\mathscr{H}, C)$ est pur de poids* 0 *si et seulement si il existe une $\Gamma(\Omega_0, \mathscr{O})$-base $\boldsymbol{\varepsilon}$ de $\Gamma(\Omega_0, \mathscr{H})$ pour laquelle* *la matrice $C(\boldsymbol{\varepsilon},\overline{\boldsymbol{\varepsilon}})$ (qui est une matrice de fonctions holomorphes au voisinage de $\mathbf{S}$) est constante.*

De plus, $(\mathscr{H},C)$ est pur de poids 0 et polarisé si on peut choisir $\boldsymbol{\varepsilon}$ de sorte que la matrice $C(\boldsymbol{\varepsilon},\overline{\boldsymbol{\varepsilon}})$ soit l'identité. □

1.d. Deux exemples. — Je vais développer l'approche esquissée au § 1.c.

(i) Soit M le $\mathbb{C}[t]\langle\partial_t\rangle$-module « masse de Dirac en c », *i.e.*, $M=\mathbb{C}[t]\langle\partial_t\rangle/(t-c)$. Je note m la classe de 1 dans M, $\widehat{M}$ le transformé de Laplace de M (avec $z^{-1}=\partial_t$, $z^2\partial_z=t$), $G=\widehat{M}[z]$, $G_0=\mathbb{C}[z^{-1}]\cdot m$.

Soit δ_c la distribution de Dirac en c, qui est définie par le fait que, pour toute fonction test φ, on a $\langle\delta_c,\varphi\frac{i}{2\pi}\,dt\wedge d\bar t\rangle=\varphi(c)$.

Tout accouplement sesquilinéaire $k: M\otimes_{\mathbb{C}}\overline{M}\to\mathscr{S}'(\mathbb{A}^1)$ qui satisfait à

$$\partial_t k(m',\overline{m''})=k(\partial_t m',\overline{m''})\quad\text{et}\quad\overline{\partial}_t k(m',\overline{m''})=k(m',\overline{\partial_t m''}).$$

est de la forme $k(m,\overline{m})=\delta_c$ à une constante près. De plus, k est hermitien si et seulement si la constante est réelle. Son transformé de Fourier est

$$F_t k(m,\overline{m})=e^{\overline{c\tau}-c\tau}=e^{\overline{c/z}-c/z}.$$

En restriction à $|z|=1$ on peut aussi l'écrire sous la forme

$$C(m_{|\mathbf{S}},\overline{m}_{|\mathbf{S}})=e^{\bar c z-c/z}=e^{\bar c z}\cdot\overline{e^{\bar c z}}.$$

Si on pose $\omega=e^{-\bar c z}m$, alors $C(\omega_{|\mathbf{S}},\overline{\omega}_{|\mathbf{S}})=1$.

(ii) On pose $M=\mathbb{C}[t]\langle\partial_t\rangle/(t\partial_t-\alpha)$ avec $\alpha\in\,]-1,0[$, m est la classe de 1. Ici, $\widehat{M}=G$ et $G_0=\mathbb{C}[z^{-1}]\cdot m$. Alors $k(m,\overline{m})=|t|^{2\alpha}$ à une constante près, et

$$F_t k(m,\overline{m})=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(-\alpha)}\left|\tau\right|^{-2(\alpha+1)}=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(-\alpha)}\left|z\right|^{2(\alpha+1)}.$$

En restriction à $z=1$, on trouve

$$C(m_{|\mathbf{S}},\overline{m}_{|\mathbf{S}})=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(-\alpha)}>0.$$

Ici, on peut prendre $\omega=\sqrt{\Gamma(-\alpha)/\Gamma(\alpha+1)}\,m$ pour obtenir un twisteur polarisé.

1.e. Le cas intégrable. — Je dirai que le twisteur $(\mathscr{H},C)$ est intégrable si $\mathscr{H}$ est muni d'une connexion ∇ à pôle double en 0 et sans autre pôle, et de plus C est compatible aux connexions ($\overline{\mathscr{H}}$ est muni d'une connexion à pôle double en ∞ déduite de celle de $\mathscr{H}$). Si $\mathscr{L}$ est le système local des sections de $\mathscr{H}$ sur Ω_0^*, la donnée de C est équivalente à la donnée d'un accouplement sesquilinéaire non dégénéré

$$C:\mathscr{L}_{|\mathbf{S}}\otimes_{\mathbb{C}_{\mathbf{S}}}\sigma^{-1}\overline{\mathscr{L}_{|\mathbf{S}}}\longrightarrow\mathbb{C}_{\mathbf{S}}.$$

On remarque que, sur $\mathbf{S}$, on a $\sigma(z) = -z$. Si on note ι l'involution $z \mapsto -z$, on obtient donc :

La donnée d'un twisteur intégrable $(\mathscr{H}, C, \nabla)$ *est équivalente à la donnée de* $(\mathscr{H}, \nabla)$ *et d'un accouplement sesquilinéaire non dégénéré*

$$C : \mathscr{L}_{|\mathbf{S}} \otimes_{\mathbb{C}_{\mathbf{S}}} \iota^{-1}\overline{\mathscr{L}_{|\mathbf{S}}} \longrightarrow \mathbb{C}_{\mathbf{S}}.$$

2. Structure de twisteur intégrable sur le réseau de Brieskorn

Je reviens au réseau de Brieskorn G_0 muni de sa connexion ∇ à pôle double. Pour construire une forme hermitienne non dégénérée h sur $\Omega^{n+1}(U)/df \wedge \Omega^n(U)$, il suffit donc de construire un accouplement hermitien non dégénéré sur le système local $\mathscr{L}$ associé, et montrer que cet accouplement définit une structure de twisteur intégrable *de poids* 0.

2.a. Définition de l'accouplement. — On a un accouplement naturel non dégénéré (accouplement de dualité de Poincaré, rendu sesquilinéaire)

$$P : \boldsymbol{R}f_! \, {}^p\mathbb{C}_U \otimes_{\mathbb{C}} \overline{\boldsymbol{R}f_* \, {}^p\mathbb{C}_U} \longrightarrow \mathbb{C}_{\mathbb{A}^{1\mathrm{an}}}[2],$$

où on note ${}^p\mathbb{C}_U = \mathbb{C}[\dim U]$. Les transformés de Laplace topologiques des deux complexes $\boldsymbol{R}f_! \, {}^p\mathbb{C}_U$ et $\boldsymbol{R}f_* \, {}^p\mathbb{C}_U$ coïncident avec le système local $\mathscr{L}$, et P induit, par transformation de Laplace topologique un accouplement sesquilinéaire non dégénéré

$$\widehat{P} : \mathscr{L}_{|\mathbf{S}} \otimes_{\mathbb{C}_{\mathbf{S}}} \sigma^{-1}\overline{\mathscr{L}_{|\mathbf{S}}} \longrightarrow \mathbb{C}_{\mathbf{S}},$$

d'où la structure de twisteur cherchée. On pose

$$C = \frac{(-1)^{n(n+1)/2}}{(2i\pi)^{n+1}} \cdot \widehat{P}.$$

Théorème. — *Le twisteur intégrable* (G_0, ∇, C) *est pur de poids* 0*, et la forme hermitienne* h *induite sur* $\Omega^{n+1}(U)/df \wedge \Omega^n(U)$ *est définie positive.*

La construction de C peut se faire en famille, et on en déduit, sur le germe de déploiement universel de f, *via* l'application de périodes infinitésimale, une métrique hermitienne définie positive sur le fibré tangent, en supplément de la forme bilinéaire non dégénérée induite par le résidu, et conduit à une structure tt^*. C'était la motivation de Claus Hertling pour conjecturer le théorème ci-dessus.

3. Esquisse de démonstration du théorème

On a un diagramme

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, hook, "\kappa"] \arrow[dr, "f"'] & X \arrow[d, "F"] \\ & \mathbb{A}^1 \end{tikzcd}$$

avec F projective, de sorte que F n'ait pas de cycles évanescents à l'infini relativement au complexe de faisceaux $\boldsymbol{R}\kappa_*\mathbb{C}_U$. Soit

$$M = \Omega^{n+1}(U)[\partial_t]/(d - df \wedge \otimes\partial_t)\Omega^n(U)[\partial_t]$$

le système de Gauss-Manin de f. En général, M est sous-jacent à une variation de structure de Hodge mixte polarisable, mais celle-ci n'est pas pure. Il existe un module de Hodge polarisable M' dont la fibre générique $M'/(t-c)M'$ s'identifie à la cohomologie d'intersection de la fibre générique de F, et on a un morphisme naturel $M' \to M$.

Lemme. — *Le noyau et le conoyau de $M' \to M$ sont isomorphes à des puissances de $\mathbb{C}[t]$.*

On en déduit que $G' = G$. Soit $F^{\mathrm{H}}_{\bullet}M'$ la filtration de Hodge définie par M. Saito, et $F_{\bullet}M' = F^{\mathrm{H}}_{\bullet-(n+1)}M'$. On définit aussi $G'_0 = F_pM' + \partial_t^{-1}(F_pM') + \cdots$ pour $p \gg 0$ (ceci ne dépend pas de p assez grand).

Lemme. — *On a $G'_0 = G_0$.*

On remplace enfin M' par sa partie primitive PM' (relativement à un fibré en droites sur X, ample relativement à F). Par le théorème de décomposition de M. Saito, on sait que $(PM', F_{\bullet}PM')$ est facteur direct de $(M', F_{\bullet}M')$, et on montre que l'autre facteur est isomorphe à une puissance de $\mathbb{C}[t]$. Ainsi, $G_0 = PG'_0$ peut aussi être calculé à l'aide d'un $\mathbb{C}[t]\langle\partial_t\rangle$-module de Hodge polarisable. On applique alors un résultat général sur les transformés de Laplace de modules de Hodge polarisables (*cf.* exposé du 13 janvier 2005 à Nice). □

C. Sabbah, UMR 7640 du CNRS, Centre de Mathématiques Laurent Schwartz, École polytechnique, F–91128 Palaiseau cedex, France • *E-mail :* sabbah@math.polytechnique.fr
Url : http://www.math.polytechnique.fr/cmat/sabbah/sabbah.html