TRANSFORMATION DE FOURIER-LAPLACE D'UNE VARIATION DE STRUCTURE DE HODGE COMPLEXE POLARISÉE

EXPOSÉ À NICE, JANVIER 2005

Claude Sabbah

Introduction

Soit $P = \{p_1, \ldots, p_r, p_{r+1} = \infty\}$ un ensemble fini non vide de points sur la sphère de Riemann $\mathbb{P}^1$. Soit (V, ∇) un fibré holomorphe à connexion sur $X^* := \mathbb{P}^1 \smallsetminus P$. Nous notons t la coordonnée sur la droite affine $\mathbb{A}^1 = \mathbb{P}^1 \smallsetminus \{\infty\}$. On peut associer à (V, ∇) un unique $\mathbb{C}[t]\langle\partial_t\rangle$-module M, holonome régulier (y compris à l'infini), qui est une *extension minimale* sur $\mathbb{A}^1$ (caractérisé par le fait que son complexe de de Rham sur $\mathbb{A}^{1\mathrm{an}}$ est $j_* \ker \nabla$, si $j : X^* \hookrightarrow \mathbb{A}^{1\mathrm{an}}$ désigne l'inclusion).

Supposons maintenant que (V, ∇) sous-tende une variation de structure de Hodge complexe polarisée d'un certain poids $w \in \mathbb{Z}$. Je vais considérer la question suivante :

Question. — *Quel type de structure existe-t-il sur le transformé de Fourier-Laplace $\widehat{M}$ de M ?*

Soit τ la coordonnée sur le plan de Fourier $\widehat{\mathbb{A}}^1$. Il est connu que $\widehat{M}$ n'a de singularité qu'en $\tau = 0$ et $\tau = \infty$, celle en 0 étant régulière mais celle à l'infini est en général irrégulière. En particulier, $\widehat{M}$ définit un fibré holomorphe à connexion $(\widehat{V}, \widehat{\nabla})$ sur $\widehat{X}^* := \widehat{\mathbb{A}}^1 \smallsetminus \{0\}$.

La variation de structure de Hodge complexe fournit une bonne filtration $F_\bullet M$ de M. En général, il n'y a pas moyen d'en déduire une bonne filtration sur le transformé de Fourier. Par suite, il ne faut pas s'attendre à ce que $\widehat{M}$ sous-tende une variation de structure de Hodge complexe polarisée au sens usuel. Ceci est également exclu à cause de la singularité irrégulière à l'infini.

Supposons pour simplifier que le poids w soit nul. La variation de structure de Hodge polarisée induit un $\mathscr{D}$-module avec structure de twisteur polarisée de poids 0 sur $\mathbb{P}^1$: c'est une conséquence des résultats de Schmid [**5**]. On introduit une nouvelle variable z. Alors, un tel objet est décrit par la donnée d'un $\mathbb{C}[t,z]\langle\eth_t\rangle$-module — ici le module de Rees $R_F M := \oplus_k F_k M z^k$ — où $\eth_t$ agit par $z\partial_t$, et d'un accouplement sesquilinéaire C qui est construit à l'aide de la métrique hermitienne sur V (la polarisation de la variation de structure de Hodge).

Le transformé de Fourier d'un tel objet est un objet du même type (si on ne fait pas attention au point $\widehat{\infty}$ à l'infini dans le plan de Fourier) : plus précisément, c'est un $\mathscr{D}$-module avec structure de twisteur polarisée de poids 0 sur $\widehat{X}^{\mathrm{an}}$ (*cf.* [**3**]). il peut ne pas être z-gradué, comme $R_F M$, mais cette graduation est transformée en une propriété similaire, l'*intégrabilité* (*cf.* [**4**, Chap. 7]). Sur $\widehat{X}^*$ l'objet que l'on obtient peut être appelé *variation de tt* structure complexe* (C. Hertling [**1**] demande aussi une structure réelle, que l'on ne considère pas ici). Dans cette variation, la fibre en $\tau \neq 0$ sous-tend une structure de Hodge polarisée de poids 0 mais, en général, la famille ne sous-tend pas naturellement une variation de structure de Hodge polarisée.

La fibre en $\tau = 1$ du transformé de Fourier est une structure de twisteur polarisée de poids 0. Elle consiste d'un $\mathbb{C}[z]$-module muni d'un accouplement sesquilinéaire (au sens de [**4**, § 2.1]). Ce $\mathbb{C}[z]$-module est obtenu à partir de la filtration $F_\bullet M$ (*cf.* lemme 4.1) par un procédé de *saturation* par ∂_t^{-1}.

1. Transformé de Fourier et accouplements sesquilinéaires

Conjugaison. — Soit X une variété complexe de faisceau structural $\mathscr{O}_X$, et soit $X_{\mathbb{R}}$ la variété C^∞ sous-jacente. Je note $\overline{X}$ la variété $X_{\mathbb{R}}$ muni du faisceau structural $\mathscr{O}_{\overline{X}} := \overline{\mathscr{O}_X}$. La conjugaison complexe est un isomorphisme de variétés complexes $(\overline{X}, \mathscr{O}_{\overline{X}}) \to (X, \mathscr{O}_X)$ et l'image inverse par ce morphisme est un foncteur que j'appelle aussi "conjugaison".

Étant donné un $\mathscr{O}_X$-module $\mathscr{F}$, son conjugué est noté $\overline{\mathscr{F}}$: c'est un $\mathscr{O}_{\overline{X}}$-module. Si ∇ est une connexion plate sur $\mathscr{F}$, alors $\overline{\nabla}$ est une connexion plate sur $\overline{\mathscr{F}}$ et $\ker\overline{\nabla}$ est le système local conjugué à $\ker\nabla$ (correspondant à la représentation conjuguée du groupe fondamental).

De même, la notion de conjugaison est bien définie pour les $\mathscr{D}_X$-modules.

Accouplements sesquilinéaires. — Un *accouplement sesquilinéaire* entre les $\mathscr{D}$-modules $\mathscr{M}', \mathscr{M}''$ est un morphisme $\mathscr{D}_X \otimes_{\mathbb{C}} \mathscr{D}_{\overline{X}}$-linéaire $\mathscr{M}' \otimes_{\mathbb{C}} \overline{\mathscr{M}''} \to \mathfrak{Db}_{X_{\mathbb{R}}}$ (le faisceau des distributions sur $X_{\mathbb{R}}$).

En dimension 1, j"en utilise aussi une version affine : soit $\mathbb{C}[t]\langle\partial_t\rangle$ l'algèbre de Weyl de la variable t et soit $\mathscr{S}'(\mathbb{A}^1)$ l'espace de Schwartz des distributions tempérées sur la droite complexe. Si M', M'' sont des $\mathbb{C}[t]\langle\partial_t\rangle$-modules, je vais considérer des accouplements sesquilinéaires $M' \otimes_{\mathbb{C}} \overline{M''} \to \mathscr{S}'(\mathbb{A}^1)$.

Si $M' = M'' =: M$, on dit qu'un accouplement sesquilinéaire $k : M \otimes_{\mathbb{C}} \overline{M} \to \mathscr{S}'(\mathbb{A}^1)$ est *hermitien* si $k(m, \overline{n}) = \overline{k(n, \overline{m})}$ pour tous $m, n \in M$ (et une définition analogue pour l'analogue faisceautique).

Transformé de Fourier d'un accouplement sesquilinéaire. — Si M est un $\mathbb{C}[t]\langle\partial_t\rangle$-module, je note $\widehat{M}$ son transformé de Fourier-Laplace : c'est le $\mathbb{C}$-espace vectoriel M muni de la structure de $\mathbb{C}[\tau]\langle\partial_\tau\rangle$-module suivante : τ agit par ∂_t et ∂_τ par $-t$. Étant donné un $\mathbb{C}[\tau]\langle\partial_\tau\rangle$-module N, je note ι^*N le $\mathbb{C}$-espace vectoriel N muni de la structure de $\mathbb{C}[\tau]\langle\partial_\tau\rangle$-module suivante : τ agit par $-\tau$ et ∂_τ par $-\partial_\tau$.

La transformation de Fourier de noyau $\exp(\overline{t\tau} - t\tau)$ est un isomorphisme entre $\mathscr{S}'(\mathbb{A}^1)$ (plan des t) et $\mathscr{S}'(\widehat{\mathbb{A}}^1)$ (plan des τ). Si $k : M' \otimes_{\mathbb{C}} \overline{M''} \to \mathscr{S}'(\mathbb{A}^1)$ est un accouplement sesquilinéaire, je note $\widehat{k}$ le composé de k et de la transformation de Fourier des distributions tempérées. Alors $\widehat{k}$ est un accouplement sesquilinéaire

$$\widehat{k} : \widehat{M'} \otimes_{\mathbb{C}} \overline{\iota^*\widehat{M''}} \longrightarrow \mathscr{S}'(\widehat{\mathbb{A}}^1).$$

Le cas des $\mathbb{C}[t]\langle\partial_t\rangle$-modules holonomes réguliers. — Supposons maintenant que M', M'' sont des$\mathbb{C}[t]\langle\partial_t\rangle$-modules holonomes qui on une singularité régulière à l'infini. Alors $\widehat{M'}, \widehat{M''}$ n'ont de singularité qu'en $\tau = 0$ et $\tau = \infty$. Notons $G'^{\mathrm{an}}, G''^{\mathrm{an}}$ les fibrés vectoriels holomorphes à connexion $\widehat{\nabla}$ obtenus en restreignant $\widehat{M'}, \widehat{M''}$ à $\tau \neq 0$, et $\mathscr{L}', \mathscr{L}''$ les systèmes locaux $\ker \widehat{\nabla}$ correspondants.

L'accouplement sesquilinéaire $\widehat{k}$ induit un accouplement sesquilinéaire $\widehat{k} : G'^{\mathrm{an}} \otimes_{\mathbb{C}} \overline{\iota^* G''^{\mathrm{an}}} \to \mathscr{C}^\infty_{\tau\neq 0}$, dont la donnée est équivalente à celle de l'accouplement sesquilinéaire

$$\mathscr{L}' \otimes_{\mathbb{C}} \overline{\iota^{-1}\mathscr{L}''} \longrightarrow \mathbb{C}_{\tau\neq 0},$$

et, en notant S^1 le cercle $|\tau| = 1$, ce dernier est équivalent à la donnée de accouplement sesquilinéaire restriction

$$\mathscr{L}'_{|S^1} \otimes_{\mathbb{C}} \overline{\iota^{-1}\mathscr{L}''_{|S^1}} \longrightarrow \mathbb{C}_{S^1}. \tag{1.1}$$

2. Conjugaison twistorielle et accouplements sesquilinéaires twistoriels

Je considère maintenant la droite projective $\mathbb{P}^1$ munie de deux cartes affines Ω_0 et Ω_∞, et je note z (*resp.* z') la coordonnée dans la carte Ω_0 (*resp.* Ω_∞) avec $z' = 1/z$.

Conjugaison twistorielle. — Je note maintenant c le foncteur de conjugaison considéré plus haut et, si $\sigma : \mathbb{P}^1 \to c\mathbb{P}^1$ ou $c\mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ est l'application $z \mapsto -1/c(z)$ ou $c(z) \mapsto -1/z$, je note $\overline{}$ le foncteur σ^*cque j'appelle foncteur de *conjugaison twistorielle* ou géométrique. Par exemple, si $\mathscr{H}$ est un $\mathscr{O}_{\Omega_0}$-module, alors $\overline{\mathscr{H}}$ est un $\mathscr{O}_{\Omega_\infty}$-module.

Dans la suite, je note $\mathbf{S}$ le cercle $|z| = 1$ et $\mathscr{O}_{\mathbf{S}}$ la restriction faisceautique $\mathscr{O}_{\Omega_0|\mathbf{S}}$ (qui peut être identifiée au faisceau des fonctions analytiques réelles sur $\mathbf{S}$ à valeurs complexes).

Accouplement sesquilinéaire twistoriel et objets de $\mathscr{R}$- Triples(pt). — Soient $\mathscr{H}', \mathscr{H}''$ deux $\mathscr{O}_{\Omega_0}$-modules. Un accouplement sesquilinéaire (twistoriel) entre ces modules est par définition un morphisme $\mathscr{O}_{\mathbf{S}}$-linéaire

$$C : \mathscr{H}'_{|\mathbf{S}} \underset{\mathscr{O}_{\mathbf{S}}}{\otimes} \overline{\mathscr{H}''_{|\mathbf{S}}} \longrightarrow \mathscr{O}_{\mathbf{S}}.$$

Dans [**4**, § 2.1.b], j'ai noté $\mathscr{R}$- Triples(pt) la catégorie de tels triplets $(\mathscr{H}', \mathscr{H}'', C)$.

Je dis qu'un tel triplet est *intégrable* si $\mathscr{H}', \mathscr{H}''$ sont munis d'une connexion méromorphe ayant un pôle d'ordre au plus 2 en $z = 0$ et pas d'autre pôle (*i.e.*, si ils sont munis d'une action de $z^2\partial_z$) et si l'accouplement sesquilinéaire C satisfait à

$$z\partial_z C(m', \overline{m''}) = C(z\partial_z m', \overline{m''}) - C(m', \overline{z\partial_z m''}), \tag{2.1}$$

où l'action de $z\partial_z$ sur $\mathscr{H}_{|\mathbf{S}}$ est celle de $z^{-1} \cdot z^2\partial_z$. Je note $\mathscr{R}$ int-Triples(pt) la catégorie des triplets intégrables.

Soient $\mathscr{L}' \subset \mathscr{H}'_{|z\neq 0}$, $\mathscr{L}'' \subset \mathscr{H}''_{|z\neq 0}$ les systèmes locaux $\ker z^2\partial_z$. Le système local associé à $\overline{\mathscr{H}''}$ sur $z \neq 0$ est alors $\sigma^{-1}c\mathscr{L}''$. On remarque qu'en restriction à $\mathbf{S}$, σ est égal à ι (introduit plus haut) et que, en restriction aux systèmes locaux, l'accouplement sesquilinéaire C prend ses valeurs dans le faisceau constant $\mathbb{C}_{\mathbf{S}} = \ker z\partial/\partial z$. Par suite, l'accouplement sesquilinéaire d'un objet de $\mathscr{R}$ int-Triples(pt) est déterminé par le morphisme $\mathbb{C}$-linéaire (sa restriction aux sections horizontales) :

$$C : \mathscr{L}'_{|\mathbf{S}} \otimes_{\mathbb{C}} \iota^{-1}c\mathscr{L}''_{|\mathbf{S}} \longrightarrow \mathbb{C}_{\mathbf{S}}. \tag{2.2}$$

Structures de twisteur polarisées de poids 0. — Soient $\mathscr{H}', \mathscr{H}''$ deux fibrés vectoriels (de même rang) sur Ω_0. Je dis que l'objet $(\mathscr{H}', \mathscr{H}'', C)$ de $\mathscr{R}$- Triples(pt) est une structure twistorielle de poids 0 si C définit un recollement entre $\mathscr{H}'^{\vee}$ (fibré dual) et $\overline{\mathscr{H}''}$ (en d'autres termes, C est non dégénéré) et si le fibré vectoriel sur $\mathbb{P}^1$ ainsi obtenu est *trivial* (le poids est 0).

Une polarisation est alors une identification (qu'en général je choisis égale à l'identité) entre $\mathscr{H}'$ et $\mathscr{H}''$ (*cf.* [**4**, § 2.1.c]) telle que, si je pose $\mathscr{H} = \mathscr{H}' = \mathscr{H}''$, l'accouplement sesquilinéaire $C : \mathscr{H}_{|\mathbf{S}} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathbf{S}}} \overline{\mathscr{H}_{|\mathbf{S}}} \to \mathscr{O}_{\mathbf{S}}$ soit *hermitien* (*i.e.*, $C(m, \overline{\mu}) = \overline{C(\mu, \overline{m})}$ pour des sections locales m de $\mathscr{H}_{|\mathbf{S}}$ et μ de $\iota^{-1}\mathscr{H}_{|\mathbf{S}}$) et *défini positif*, *i.e.*, il existe un $\mathbb{C}$-espace vectoriel $H \subset \Gamma(\Omega_0, \mathscr{H})$ tel que

– $\mathscr{H} = \mathscr{O}_{\Omega_0} \otimes_{\mathbb{C}} H$,
– C envoie $H \otimes_{\mathbb{C}} \overline{H}$ dans $\mathbb{C} \subset \Gamma(\mathbf{S}, \mathscr{O}_{\mathbf{S}})$ (donc est une forme hermitienne sur H),
– et est définie positive en tant que telle.

3. Transformé de Fourier d'un $\mathbb{C}[t]\langle\partial_t\rangle$-module filtré muni d'un accouplement sesquilinéaire

Supposons que le $\mathbb{C}[t]\langle\partial_t\rangle$-module M soit muni d'une bonne filtration $F_\bullet M$ et d'un accouplement sesquilinéaire $k : M \otimes_{\mathbb{C}} \overline{M} \to \mathscr{S}'(\mathbb{A}^1)$. Je vais lui associer un objet $(\mathscr{H}, \mathscr{H}, \widehat{C})$ de $\mathscr{R}$ int-Triples(pt).

Saturation d'une filtration d'un $\mathbb{C}[t]\langle\partial_t\rangle$-module holonome. — Soit M un $\mathbb{C}[t]\langle\partial_t\rangle$-module holonome et $F_\bullet M$ une bonne filtration de M (en particulier, chaque F_k est un $\mathbb{C}[t]$-module de type fini). Je suppose pour simplifier que 0 est un indice tel que l'on ait $F_k = F_0 + \cdots + \partial_t^k F_0$ pour tout $k \geqslant 0$ (Je dirai alors que $F_\bullet M$ est engendré par $F_0 M$). Je pose $M[\partial_t^{-1}] = \mathbb{C}[t]\langle\partial_t, \partial_t^{-1}\rangle \otimes_{\mathbb{C}[t]\langle\partial_t\rangle} M$ (il est connu que $M[\partial_t^{-1}]$ est aussi holonome en tant que $\mathbb{C}[t]\langle\partial_t\rangle$-module) et je note $\widehat{\mathrm{loc}} : M \to M[\partial_t^{-1}]$ le morphisme naturel (le noyau et conoyau duquel sont isomorphes à des puissances de $\mathbb{C}[t]$ avec sa structure naturelle de $\mathbb{C}[t]\langle\partial_t\rangle$-module à gauche). Soit $G_0 = \sum_{j\geqslant 0} \partial_t^{-j} \widehat{\mathrm{loc}}(F_0)$. C'est un sous $\mathbb{C}[\partial_t^{-1}]$-module de $M[\partial_t^{-1}]$. De plus, à cause de la relation $[t, \partial_t^{-1}] = (\partial_t^{-1})^2$, il est naturellement muni d'une action de $\mathbb{C}[t]$. Si M a une singularité régulière à l'infini, alors G_0 est de type fini sur $\mathbb{C}[\partial_t^{-1}]$ (*cf.* [**2**, Th. V.2.7]).

Pour tout $k \geqslant 0$ on a donc

$$G_k := \sum_{j\geqslant 0} \partial_t^{-j} \widehat{\mathrm{loc}}(F_k) = \partial_t^k G_0. \tag{3.1}$$

***Définition 3.2* (La correspondance fondamentale).** — Considérons $(M, F_\bullet M, k)$, où

– M est un $\mathbb{C}[t]\langle\partial_t\rangle$-module holonome qui est *régulier en* ∞,
– $F_\bullet M$ est une bonne filtration qui est engendrée par $F_0 M$,
– $k : M \otimes_{\mathbb{C}} \overline{M} \to \mathscr{S}'(\mathbb{A}^1)$ est un accouplement sesquilinéaire.

On associe à ces données un objet $(\mathscr{H}, \mathscr{H}, \widehat{C})$ de $\mathscr{R}$ int-Triples(pt) défini comme suit :

– on pose $\mathscr{H} = G_0^{\mathrm{an}}$ en renommant z la variable $\tau^{-1} = \partial_t^{-1}$ et on définit l'action de $z^2\partial_z$ comme étant celle de t (on remarque que $G_{0|\tau\neq 0} = \widehat{M}_{|\tau\neq 0}$),

– L'accouplement sesquilinéaire (1.1) induit par k est maintenant vu comme un accouplement sesquilinéaire (2.2), et donc définit un accouplement sesquilinéaire intégrable $\widehat{C} : \mathscr{H}_{|\mathbf{S}} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathbf{S}}} \overline{\mathscr{H}_{|\mathbf{S}}} \to \mathscr{O}_{\mathbf{S}}$.

Remarque 3.3. — Dans une telle correspondance, si k est hermitien, alors $\widehat{C}$ l'est aussi.

Théorème. — *Si $(M, F_\bullet M, k)$ est l'extension minimale d'une variation de structure de Hodge polarisée sur X^*, alors l'objet associé $(\mathscr{H}, \mathscr{H}, \widehat{C})$ est une structure de twisteur polarisée intégrable de poids* 0.

4. Explication de la correspondance

Renommer τ^{-1} en z signifie changer le type de conjugaison que l'on veut considérer. Cela peut paraître un peu mystérieux. On le comprends mieux si on introduit la variable z dès le début, avant la transformation de Fourier. Je vais associer aux données $(M, F_\bullet M, k)$ un objet de $\mathscr{R}$ int-Triples$(\mathbb{A}^1)$. Je travaillerai d'abord de manière algébrique dans les coordonnées t et z.

Le module de Rees d'une bonne filtration. — Soit $(M, F_\bullet M)$ comme avant et $R_F M$ le module de Rees $\oplus_k F_k M z^k$, où z est une nouvelle variable. On a $R_F M \subset \mathbb{C}[z, z^{-1}] \otimes_{\mathbb{C}} M$ et de plus $\mathbb{C}[z, z^{-1}] \otimes_{\mathbb{C}[z]} R_F M = \mathbb{C}[z, z^{-1}] \otimes_{\mathbb{C}} M$. C'est un $\mathbb{C}[t, z]\langle \eth_t \rangle$-module ($\eth_t$ agit par $z \otimes \partial_t$). Il est intégrable, l'action de $z^2 \partial_z$ étant l'action naturelle.

La conjugaison est d'une part la conjugaison naturelle par rapport à la variable t et d'autre part la conjugaison twistorielle par rapport à la variable z. En particulier, le conjugué $\overline{\mathbb{C}[z, z^{-1}] \otimes_{\mathbb{C}} M}$ est $\mathbb{C}[z, z^{-1}] \otimes_{\mathbb{C}} \overline{M}$ avec la structure twisteur-conjuguée de $\mathbb{C}[z, z^{-1}]$-module.

Si k est un accouplement sesquilinéaire sur M, alors on l'étend par $\mathbb{C}[z, z^{-1}]$-linéarité en

$$C : \big(\mathbb{C}[z, z^{-1}] \otimes_{\mathbb{C}} M\big) \otimes_{\mathbb{C}[z, z^{-1}]} \big(\overline{\mathbb{C}[z, z^{-1}] \otimes_{\mathbb{C}} M}\big) \longrightarrow \mathbb{C}[z, z^{-1}] \otimes_{\mathbb{C}} \mathscr{S}'(\mathbb{A}^1).$$

De manière évidente, C satisfait à la condition d'intégrabilité analogue à (2.1).

4.a. Transformé de Fourier-Laplace du module de Rees d'une bonne filtration

Le transformé de Fourier-Laplace $\widehat{R_F M}$ de $R_F M$ est par définition le $\mathbb{C}[z]$-module $R_F M$ muni de l'action de $\mathbb{C}[\tau, z]\langle \eth_\tau \rangle$ où τ agit par $\eth_t$ et $\eth_\tau$ par $-t$. Le noyau correspondant est $\exp(-it\tau/z)$.

Lemme 4.1. — *Le transformé de Fourier localisé* $\mathbb{C}[\tau,\tau^{-1},z]\otimes_{\mathbb{C}[\tau,z]}\widehat{R_FM}$ *sa structure naturelle de* $\mathbb{C}[\tau,\tau^{-1},z]\langle\eth_\tau\rangle$ *est isomorphe à* $\mathbb{C}[\tau,\tau^{-1}]\otimes_{\mathbb{C}}G_0$ *muni de la structure suivante :*

– *la* $\mathbb{C}[\tau,\tau^{-1}]$*-structure naturelle,*

– *la multiplication par* z *est donnée par* $z\cdot(\tau^k\otimes g)=\tau^{k+1}\otimes(\partial_t^{-1}g)$*, i.e.,* $z\,\cdot\,=(\tau\otimes\partial_t^{-1})\,\cdot$ *,*

– *l'action de* $\eth_\tau$ *est donnée par* $\eth_\tau(\tau^k\otimes g)=\tau^k\otimes[(k\partial_t^{-1}-t)g]$*, i.e.,*

$$\eth_\tau\,\cdot\,=z\cdot(\partial_\tau\otimes 1)-1\otimes t=\tau\partial_\tau\otimes\partial_t^{-1}-1\otimes t.$$

En particulier, la fibre de $\widehat{R_FM}$ en $\tau_o\neq 0$ est G_0 avec l'action de $\mathbb{C}[z]$ définie par $z\cdot g=\tau_o\partial_t^{-1}g$. Autrement dit, le G_0 avec action renommée utilisé dans la correspondance de base n'est autre que la fibre en $\tau=1$ du transformé de Fourier-Laplace de R_FM.

***Remarque 4.2* (Intégrabilité).** — Comme R_FM est naturellement muni d'une action de $z^2\partial_z$ ($m_kz^k\mapsto km_kz^{k+1}$), son transformé de Fourier-Laplace $\widehat{R_FM}$ est muni d'une action tordue action $m_kz^k\mapsto km_kz^{k+1}+\partial_t tm_kz^k$. Le transformé de Fourier localisé a aussi une telle action. Sur le modèle $\mathbb{C}[\tau,\tau^{-1}]\otimes_{\mathbb{C}}G_0$, où la multiplication par z est donnée par l'action de $\tau\otimes\partial_t^{-1}$, l'action de $z^2\partial_z$ est donnée par celle de $\tau\otimes t$.

On voit donc que la fibre de $\widehat{R_FM}$ en $\tau_o\neq 0$, en tant que $\mathbb{C}[z]\langle z^2\partial_z\rangle$-module, est identifiée à G_0 sa structure naturelle (multipliée par τ_o) de $\mathbb{C}[\theta]\langle\theta^2\partial_\theta\rangle$-module ($\theta=\partial_t^{-1}$, $\theta^2\partial_\theta=t$) : z agit par $\tau_o\theta$ et $z^2\partial_z$ par $\tau_o\theta^2\partial_\theta$.

***Remarque 4.3* (Localisation par rapport à z).** — Je localise maintenant par rapport à z le module considéré au lemme 4.1. Si je localise d'abord $\widehat{R_FM}$ par rapport à z, j'obtiens le module $\mathbb{C}[z,z^{-1}]\otimes_{\mathbb{C}}M$. Si je localise ensuite par rapport à τ, j'obtiens $\mathbb{C}[z,z^{-1}]\otimes_{\mathbb{C}}M[\partial_t^{-1}]$. J'ai aussi une description de ce module sous la forme $\mathbb{C}[\tau,\tau^{-1}]\otimes_{\mathbb{C}}G$ si je pose $G=M[\partial_t^{-1}]$. Il est muni d'une action de $\mathbb{C}[\tau,\tau^{-1},z,z^{-1}]\langle\partial_\tau,\partial_z\rangle$ par localisation de celle sur $\widehat{R_FM}$.

Notons $\theta=\tau^{-1}$ et posons $\eta=\partial_t^{-1}$ agissant sur G, de sorte que t agit par $\eta^2\partial_\eta$. Donnons la forme explicite de l'action sur $\mathbb{C}[\tau,\tau^{-1}]\otimes_{\mathbb{C}}G=\mathbb{C}[\theta,\theta^{-1}]\otimes_{\mathbb{C}}G$. L'action de z est par $\theta^{-1}\otimes\eta$, celle de ∂_z est par $\theta\otimes\partial_\eta$. D'autre part, l'action de θ est par $\theta\otimes 1$ et celle de ∂_θ est par $\partial_\theta\otimes 1+\theta^{-1}\otimes\eta\partial_\eta=\partial_\theta\otimes 1+z(1\otimes\partial_\eta)$ (car $\partial_\theta=-\tau^2\partial_\tau$).

Considérons le morphisme $p:\mathbb{C}^*\times\mathbb{C}^*\to\mathbb{C}^*$ défini par $(\theta,z)\mapsto\eta=z\theta$. Alors le module $\mathbb{C}[\theta,\theta^{-1}]\otimes_{\mathbb{C}}G$ n'est autre que l'image image (au sens des $\mathscr{D}$-modules) p^+G, si G est vu comme un $\mathbb{C}[\eta,\eta^{-1}]\langle\partial_\eta\rangle$-module.

En particulier, si $\mathscr{L}$ désigne le système local associé G^{an} sur $\mathbb{C}^*$, on voit que le système local associé à $\widehat{R_F M}$ sur $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$ est $p^*\mathscr{L}$.

4.b. Identification des accouplements sesquilinéaires

Soit u une distribution tempérée sur $\mathbb{A}^1$ (coordonnée t). On considère sa transformée de Fourier $\mathcal{F}_z u$ avec paramètre $z \in \mathbf{S}$ et noyau $\exp -2i \operatorname{Im}(t\tau/z)$. Elle appartient à l'espace $\mathscr{S}'(\widehat{\mathbb{A}}^1 \times \mathbf{S}/\mathbf{S})$, *i.e.*, est une distribution tempérée sur le produit $\widehat{\mathbb{A}}^1 \times \mathbf{S}$ qui dépend continûment de $z \in \mathbf{S}$.

Soient $m, \mu \in M$ et $u = k(m, \overline{\mu}) \in \mathscr{S}'(\mathbb{A}^1)$. Alors, restreinte à $\tau \neq 0$, la distribution $\mathcal{F}_z u$ est C^∞ par rapport à (τ, z) (c'est une composante d'une section horizontale d'une connexion intégrable). Si on travaille dans la variable $\theta = \tau^{-1}$, on voit que $\mathcal{F}_z u$ est l'image inverse *via* l'application $p : (\theta, z) \mapsto \eta = z\theta$ de la transformée de Fourier usuelle de la distribution u restreinte à $\eta^{-1} \neq 0$ (le noyau est $\exp - \operatorname{Im}(t/\eta)$).

L'accouplement sesquilinéaire $k : M \otimes_{\mathbb{C}} \overline{M} \to \mathscr{S}'(\mathbb{A}^1)$ s'étend en un accouplement sesquilinéaire (où la conjugaison est prise au sens twistoriel par rapport à la variable z)

$$
\begin{aligned}
R_F k : R_F M \otimes_{\mathbb{C}[z,z^{-1}]} \overline{R_F M} &\longrightarrow \mathbb{C}[z, z^{-1}] \otimes_{\mathbb{C}} \mathscr{S}'(\mathbb{A}^1),\\
m_p z^p \otimes \overline{m_q z^q} &\longmapsto z^p \overline{z}^q k(m_p, \overline{m_q}) = (-1)^q z^{p-q} k(m_p, \overline{m_q}).
\end{aligned}
$$

En restreignant à $\mathbf{S}$ on définit ainsi $\widehat{R_F k} : \widehat{R_F M}_{|\mathbf{S}} \otimes_{\mathscr{O}_\mathbf{S}} \overline{\widehat{R_F M}_{|\mathbf{S}}} \to \mathscr{S}'(\widehat{\mathbb{A}}^1 \times \mathbf{S}/\mathbf{S})$ par composition de $R_F k$ avec la transformation de Fourier $\mathcal{F}_z$. En restreignant aussi à $\tau \neq 0$, un tel accouplement sesquilinéaire prend ses valeurs dans les fonctions C^∞.

Rappelons que l'on a posé $S^1 = \{|\tau| = 1\} = \{|\theta| = 1\}$ et $\mathbf{S} = \{|z| = 1\}$. La restriction aux sections horizontales sur $S^1 \times \mathbf{S}$ de l'accouplement $\widehat{R_F k}$ est un accouplement sesquilinéaire $(p^*\mathscr{L})_{S^1 \times \mathbf{S}} \otimes_{\mathbb{C}} \sigma^{-1} c(p^*\mathscr{L})_{S^1 \times \mathbf{S}} \to \mathbb{C}$, puisque $p^*\mathscr{L}$ est le faisceau des sections horizontales de $\widehat{R_F M}$ sur $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$. Rappelons aussi que, sur $\mathbf{S}$, on a $\sigma(z) = -1/c(z) = -z$.

Si on utilise l'involution $\iota : \eta \mapsto -\eta$, on voit que $\widehat{R_F k}_{|S^1 \times \mathbf{S}}$ est p^* de l'accouplement sesquilinéaire $\widehat{k} : \mathscr{L}_{|S^1} \otimes_{\mathbb{C}} \iota^{-1} \overline{\mathscr{L}_{|S^1}} \to \mathbb{C}_{S^1}$. La restriction à $\theta = 1$ (ou $\tau = 1$) de $\widehat{R_F k}$ coïncide donc avec $\widehat{k}$ au niveau des sections horizontales.

5. Indications sur la démonstration du théorème

Dans un premier temps, on applique les résultats de Schmid sur les variations de structures de Hodge polarisées d'une variable pour associer à toute telle variation une filtration sur l'extension minimale du fibré plat sous-jacent et un accouplement sesquilinéaire sur celle-ci. À ces données on peut donc associer un $\mathscr{D}_{\mathbb{P}^1}$-module holonome régulier avec structure de twisteur polarisée. Cette structure est de plus *intégrable*.

On a maintenant un résultat général :

Théorème. — *Le transformé de Fourier-Laplace d'un $\mathscr{D}_{\mathbb{P}^1}$-module holonome régulier avec structure de twisteur polarisée en est aussi un (hors de $\widehat{\infty}$). La transformation de Fourier-Laplace préserve l'intégrabilité.*

La démonstration de ce théorème est obtenue en analysant la dégénérescence quand $\tau \to 0$ du transformé de Fourier-Laplace et en comparant la limite à la limite, quand $t \to \infty$, du $\mathscr{D}$-module avec structure de twisteur associé à la variation de structure de Hodge polarisée. D'après Schmid, cette dernière est une structure de Hodge mixte polarisée.

Références

[1] C. Hertling – « tt^* geometry, Frobenius manifolds, their connections, and the construction for singularities », *J. reine angew. Math.* **555** (2003), p. 77–161.

[2] C. Sabbah – *Déformations isomonodromiques et variétés de Frobenius*, Savoirs Actuels, CNRS Éditions & EDP Sciences, Paris, 2002.

[3] ———, « Fourier-Laplace transform of irreducible regular differential systems on the Riemann sphere », *Russian Math. Surveys* **59** (2004), no. 6, p. 1165–1180, arXiv : `math.AG/0408294`.

[4] ———, « Polarizable twistor $\mathscr{D}$-modules », prépublication, arXiv : `math.AG/0503038`, vi+226 pages, 2005.

[5] W. Schmid – « Variation of Hodge structure : the singularities of the period mapping », *Invent. Math.* **22** (1973), p. 211–319.

C. Sabbah, UMR 7640 du CNRS, Centre de Mathématiques Laurent Schwartz, École polytechnique, F–91128 Palaiseau cedex, France • *E-mail :* `sabbah@math.polytechnique.fr`
Url : `http://www.math.polytechnique.fr/cmat/sabbah/sabbah.html`