Une conjecture de M. Kashiwara

Conjecture

Les propriétés des $\mathcal{D}$-modules de Hodge polarisables qui ne font pas intervenir explicitement la filtration de Hodge sont encore vraies lorsqu'on y remplace « $\mathcal{D}$-module de Hodge polarisable » par « $\mathcal{D}$-module holonome semi-simple ».

Trois sources d'idées :

– la théorie des ***modules de Hodge polarisables*** de M. Saito,

– la notion de ***variation de structure de twisteur***, introduite par C. Simpson (d'après une suggestion de Deligne),

– l'utilisation des ***distributions*** et de ***formes hermitiennes*** sur les $\mathcal{D}$-modules, d'après D. Barlet et M. Kashiwara.

Théorème principal

Soit $\mathcal{F}$ *un faisceau localement constant* **semi-simple** *sur une variété projective lisse* X *et* $f : X \longrightarrow S$ *une application holomorphe à valeurs dans une surface de Riemann compacte* S. *Alors le complexe image directe* $Rf_*\mathcal{F}$ *se décompose, dans la catégorie dérivée, en somme directe de faisceaux pervers (convenablement décalés) irréductibles sur* S.

Métriques harmoniques et fibrés de Higgs

***Théorème* (C. Simpson)**

Soit (V, ∇) *un fibré holomorphe muni d'une connexion plate sur une variété kählerienne compacte* X. *Alors* (V, ∇) *admet une métrique harmonique* h *si et seulement si le faisceau localement constant* $\mathcal{F}$ *de ses sections horizontales est* **semi-simple**.

$$D_V = D'_V + D''_V$$

la connexion plate sur le fibré

$$H = \mathcal{C}^\infty_X \bigotimes_{\mathcal{O}_X} V$$

obtenue à partir de ∇, de sorte que

$$(V, \nabla) = (\mathrm{Ker}\, D''_V, D'_V).$$

Soit h une métrique sur H. On peut alors trouver une unique connexion

$$D_E = D'_E + D''_E \quad \text{sur} \quad H$$

qui préserve la métrique h de sorte que, si on pose

$$\theta'_E = D'_E - D'_V, \qquad \theta''_E = D''_E - D''_V,$$

la $(0, 1)$-forme θ''_E à valeurs dans $\mathrm{End}(H)$ soit l'adjointe, relativement à h, de la $(1, 0)$-forme θ'_E.

La métrique h est ***harmonique*** relativement au fibré holomorphe plat (V, ∇) si

$$(D''_E + \theta'_E)^2 = 0$$

c'est-à-dire

$$D''^2_E = 0, \qquad D''_E(\theta'_E) = 0, \qquad \theta'_E \wedge \theta'_E = 0.$$

$$E = \operatorname{Ker} D''_E : H \longrightarrow H$$

E est un fibré holomorphe muni d'une 1-forme θ'_E à valeurs dans $\mathrm{End}(E)$, qui satisfait

$$\theta'_E \wedge \theta'_E = 0$$

θ'_E est un ***champ de Higgs*** pour E.

La platitude de D_V impose les relations

$$D_E'^2 = 0, \qquad D_E'(\theta_E') = 0, \qquad D_E''(\theta_E'') = 0.$$

Par conséquent, pour tout $z_o \in \mathbb{C}$, l'opérateur

$$D_E'' + z_o \theta_E''$$

est une structure complexe sur H.

Le fibré holomorphe associé

$$V_{z_o} = \mathrm{Ker}\, D''_E + z_o\theta''_E$$

est muni, si $z_o \neq 0$, d'une connexion holomorphe plate

$$\nabla_{z_o} = D'_E + \frac{1}{z_o}\theta'_E.$$

Pour $z_o = 1$ on retrouve (V, ∇).

Si h est harmonique, les identités de la géométrie kählerienne s'appliquent aux opérateurs mixtes

$$D' = D'_E + \theta''_E, \quad D'' = D''_E + \theta'_E$$

$$D_V = D' + D''$$

$$\Delta_{D_V} = 2\Delta_{D'} = 2\Delta_{D''}.$$

Simpson en déduit le ***théorème de Lefschetz difficile***.

Famille de fibrés plats (V_{z_o}, ∇_{z_o}) pour $z_o \neq 0$.
On a aussi des opérateurs qui satisfont les identités de la géométrie kählerienne :

$$D_{V_{z_o}} = (z_o D'_E + \theta'_E) + (D''_E + z_o \theta''_E) = z_o D' + D''$$

$$\Delta_{z_o} = (1 + |z_o|^2)\Delta_{D_V}.$$

$\Longrightarrow$ Tous les faisceaux localement constants $\mathcal{F}_{z_o}$, $z_o \neq 0$, ont même cohomologie.

Variations de structures de Hodge polarisées

$\boldsymbol{H}$ un fibré vectoriel $\boldsymbol{C^\infty}$ muni d'une décomposition

$$\boldsymbol{H} = \bigoplus_{p\in\mathbb{Z}} \boldsymbol{H}^{p,w-p} \qquad (w \in \mathbb{Z}),$$

d'une connexion plate

$$D_V = D'_V + D''_V$$

et d'une forme hermitienne non dégénérée $\boldsymbol{k}$ telles que

– la décomposition est $\boldsymbol{k}$-***orthogonale***,

– $(-1)^p\boldsymbol{k}$ sur $\boldsymbol{H}^{p,w-p}$ est ***définie positive***, et (***relations de transversalité*** de Griffiths)

$$D'_V(H^{p,w-p}) \subset \left(H^{p,w-p} \oplus H^{p-1,w-p+1}\right) \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega^1_X$$
$$D''_V(H^{p,w-p}) \subset \left(H^{p,w-p} \oplus H^{p+1,w-p-1}\right) \otimes_{\mathcal{O}_{\overline{X}}} \Omega^1_{\overline{X}}$$

où $\overline{X}$ est la variété complexe conjuguée. On dit que l'on a une ***variation de structures de Hodge complexes polarisées de poids*** w.

$$h = (-1)^p k \quad \text{sur} \quad H^{p,w-p}$$

Décomposition

$$D'_V = D'_E + \theta'_E, \qquad D''_V = D''_E + \theta''_E.$$

La métrique h est ***harmonique***.

Variations de structures de twisteur polarisées

C. Simpson présente cette notion en énonçant le

***Meta théorème* (C. Simpson)**

Si les mots **« structure de Hodge »** *sont remplacés par* **« structure de twisteur »** *dans les hypothèses et les conclusions de tout théorème en théorie de Hodge, on obtient encore un énoncé vrai, dont la preuve est analogue à celle de son modèle.*

La notion de structure de twisteur est une

« déshomogénéisation »

de celle de structure de Hodge, qui conserve néanmoins la notion de ***poids***.

Conjugaison géométrique

La sphère de Riemann $\mathbb{P}^1$ munie des deux cartes

$$U_0 \quad \text{et} \quad U_\infty$$

τ la conjugaison usuelle et σ l'involution

$$\begin{aligned} \sigma : \tau\mathbb{P}^1 &\longrightarrow \mathbb{P}^1 \\ \tau(z) &\longmapsto -1/z \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \sigma : \mathbb{P}^1 &\longrightarrow \tau\mathbb{P}^1 \\ z &\longmapsto -1/\tau(z) \end{aligned}$$

Si U est un ouvert de $\mathbb{P}^1$ et $f(x, z)$ est une fonction sur $X \times U$,

$$\overline{f}(x, z) = \overline{f(x, \sigma(z))},$$

qui est une fonction holomorphe sur $\overline{X} \times \sigma\tau(U)$. Par exemple,

$$\overline{z} = -1/z$$

est une fonction sur $\sigma\tau(U_0) = U_\infty$.

Si $\mathcal{F}$ est un $\mathcal{O}_{X\times U}$-module, alors $\tau\mathcal{F}$ est un $\mathcal{O}_{\overline{X}\times\tau(U)}$-module et $\overline{\mathcal{F}} \overset{\text{déf}}{=} \sigma^*\tau\mathcal{F}$ est un $\mathcal{O}_{\overline{X}\times\sigma\tau(U)}$-module.

Structure de twisteur polarisée

Une ***structure de twisteur de poids w sur H*** consiste en la donnée de
– deux $\mathcal{O}_{U_0}$-modules $\mathcal{H}', \mathcal{H}''$ localement libres de rang d
– et d'un ***recollement*** entre $\mathcal{H}'^*$ et $\overline{\mathcal{H}}''$ sur une couronne $\mathbf{A}$ invariante par $\sigma\tau$

$$C : \Gamma(\mathbf{A}, \mathcal{H}') \underset{\mathcal{O}(\mathbf{A})}{\otimes} \overline{\Gamma(\mathbf{A}, \mathcal{H}'')} \longrightarrow \mathcal{O}(\mathbf{A}).$$

Le recollement définit un fibré $\widetilde{\mathcal{H}}$ sur $\mathbb{P}^1$ ***isomorphe à $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(w)^d$*** tel que $\overline{H} = \Gamma(\mathbb{P}^1, \widetilde{\mathcal{H}}(-w))$.

Une polarisation est un isomorphisme

$$S : \mathcal{H}'' \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}'$$

tel que

$$\boldsymbol{C} \circ (\boldsymbol{S} \otimes \mathbf{Id}) : \Gamma(\mathrm{A}, \mathcal{H}'') \underset{\mathcal{O}(\mathrm{A})}{\otimes} \overline{\Gamma(\mathrm{A}, \mathcal{H}'')} \longrightarrow \mathcal{O}(\mathrm{A})$$

induise une ***forme hermitienne définie positive*** $\boldsymbol{h}$ sur

$$\boldsymbol{H} \underset{\mathbb{C}}{\otimes} \overline{\boldsymbol{H}}.$$

$\mathcal{R}$-modules

Le faisceau d'anneaux $\mathcal{R}_{X\times U_0}$ est localement isomorphe au faisceau d'anneaux $\mathcal{O}_{X\times U_0}\langle z\partial_{x_1},\dots,z\partial_{x_n}\rangle$. C'est l'anneau de Rees associé à $\mathcal{D}_X$ et sa filtration $F_\bullet\mathcal{D}_X$ par l'ordre des opérateurs

$$R_F\mathcal{D}_X=\bigoplus_{k\in\mathbb{N}}F_k(\mathcal{D}_X)\cdot z^k$$

que l'on a déshomogénéisé, *i.e.*

$$\mathcal{R}_{X\times U_0}=\mathcal{O}_{X\times U_0}\bigotimes_{\mathbb{C}[z]}R_F\mathcal{D}_X.$$

$\mathcal{R}_{X\times U_0}$-modules holonomes stricts

On dit qu'un $\mathcal{R}_{X\times U_0}$ est ***strict*** s'il n'a pas de $\mathcal{O}_{U_0}$-torsion.

Exemple

Un $R_F\mathcal{D}_X$-module $\mathcal{M}$ est strict si et seulement si il est de la forme R_FM pour un $\mathcal{D}_X$-module M muni d'une filtration F compatible avec celle de $\mathcal{D}_X$.

On dit qu'un $\mathcal{R}_{X\times U_0}$ est ***holonome*** si sa variété caractéristique, contenue dans $(T^*X)\times U_0$, est contenue dans un ensemble de la forme $\Lambda\times U_0$, où $\Lambda\subset T^*X$ est lagrangienne homogène.

Variations de structures de twisteur polarisées

Une ***variation de structures de twisteur de poids*** $\boldsymbol{w}$ consiste en la donnée de
– deux $\mathcal{O}_{X\times U_0}$-modules localement libres $\mathcal{H}', \mathcal{H}''$ de rang d munis d'une z-connexion plate, *i.e.* d'une structure de $\mathcal{R}_{X\times U_0}$-module,
– et d'un recollement

$$C : \pi_{\mathrm{A}*}\mathcal{H}' \underset{\mathcal{O}(\mathrm{A})}{\otimes} \overline{\pi_{\mathrm{A}*}\mathcal{H}''} \longrightarrow \mathcal{C}^\infty_X(\mathcal{O}(\mathrm{A}))$$

qui est $\mathcal{R} \otimes \overline{\mathcal{R}}$-linéaire, de sorte que la restriction à chaque fibre soit ***une structure de twisteur de poids*** $\boldsymbol{w}$.

Une ***polarisation*** est un isomorphisme $\mathcal{R}$-linéaire

$$S : \mathcal{H}'' \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}'$$

qui induit une polarisation en restriction à chaque fibre.

Le fibré $\widetilde{\mathcal{H}}$ sur $\mathbb{P}^1$ que l'on obtient par recollement de $\mathcal{H}'^*$ et $\overline{\mathcal{H}''}$ est C^∞ par rapport aux variables de X et holomorphe par rapport à la variable de $\mathbb{P}^1$. Si $\overline{H}$ est le fibré $\pi_*\widetilde{\mathcal{H}}(-w)$, la polarisation permet donc de définir une ***métrique*** h sur H.

Le fibré $\mathcal{H}'_{|z=1}$ est un sous-fibré holomorphe de H avec une structure de $\mathcal{D}_X$-module, *i.e.* muni d'une connexion holomorphe plate.

Le fibré $\mathcal{H}'_{|z=0}$ est un sous-fibré holomorphe de H avec une structure de $\mathrm{gr}^F\mathcal{D}_X = \mathcal{O}_X[TX]$-module, *i.e.* muni d'un champ de Higgs.

***Théorème* (C. Simpson)**

La métrique ainsi obtenue est harmonique. Réciproquement, toute métrique harmonique sur H s'obtient de cette manière. Si X est kählerienne compacte, *la restriction à $z = 1$ induit une équivalence entre la catégorie des variations de structures de twisteur polarisées de poids 0 et celle des représentations semi-simples de $\pi_1(X)$.*

On peut reformuler le théorème de Lefschetz montré par Simpson :

Théorème

Si X est kählerienne compacte, L l'opérateur de Lefschetz, et si $(\mathcal{H}', C)$ est une structure de twisteur polarisée de poids w sur X, alors pour tout k, la partie primitive

$$(PH^k(X, \mathcal{H}'), (-1)^{k(k-1)/2} C \circ (L^k \otimes \mathrm{Id}))$$

est une structure de twisteur polarisée de poids $w + k$.

Distributions méromorphes

On remplace le faisceau des fonctions C^∞ de X à valeurs dans $\mathcal{O}(\mathrm{A})$ par celui des distributions sur X à valeurs dans $\mathcal{O}(\mathrm{A})$.

Si α est un nombre complexe, on pose

$$\begin{aligned} \alpha \star z &= z\,\mathrm{Ré}\,\alpha + i(z-1)^2\,\mathrm{Im}\,\alpha/2 \\ &= z\big(\,\mathrm{Ré}\,\alpha + i(z+1/z)\,\mathrm{Im}\,\alpha\big). \end{aligned}$$

La fonction

$$0 \neq z \longmapsto \frac{\alpha \star z}{z}$$

est « réelle », *i.e.* invariante par le changement

$$i \longleftrightarrow -i \quad \text{et} \quad z \longleftrightarrow \overline{z} = -1/z.$$

On veut pouvoir considérer la distribution d'une variable $\boldsymbol{t}$:

$$|\boldsymbol{t}|^{2(\boldsymbol{\alpha}\star \boldsymbol{z})/\boldsymbol{z}}\,(\log|\boldsymbol{t}|)^{\boldsymbol{\ell}}.$$

Cette distribution est à valeurs dans $\mathcal{O}(\mathbf{A})$ si on la multiplie par

$$\boldsymbol{\Gamma}(\mathbf{1}+(\boldsymbol{\alpha}\star \boldsymbol{z})/\boldsymbol{z})^{-(\boldsymbol{\ell}+\mathbf{1})}.$$

Les pôles par rapport à $\boldsymbol{z}$ sont ***imaginaires purs***.

Faisceau $\mathfrak{Db}_{\boldsymbol{X}_{\mathbb{R}}}^{(\mathbf{A},*i\mathbb{R})}$

Structure de twisteur sur un $\mathcal{D}_X$-module

Une structure de twisteur de poids w sur un $\mathcal{D}_X$-module M consiste en la donnée de

– deux $\mathcal{R}_{X\times U_0}$-modules ***holonomes stricts*** $\mathcal{M}', \mathcal{M}''$,

$$\mathcal{M}'_{|z=1} = \mathcal{M}''_{|z=1} = M,$$

– et d'un accouplement $\mathcal{R} \otimes_{\mathcal{O}(\mathrm{A})} \overline{\mathcal{R}}$-linéaire

$$C : \pi_{\mathrm{A}*}\mathcal{M}' \underset{\mathcal{O}(\mathrm{A})}{\otimes} \overline{\pi_{\mathrm{A}*}\mathcal{M}''} \longrightarrow \mathfrak{Db}_{X_\mathbb{R}}^{(\mathrm{A},*i\mathbb{R})}.$$

On suppose de plus que $\mathcal{M}', \mathcal{M}''$ sont ***spécialisables*** le long de tout germe de fonction holomorphe et que les spécialisés sont des objets du même type et que, en dimension $\mathbf{0}$ on obtient une ***structure de twisteur de poids*** $w + \cdots$.

Spécialisation de C :

$$\psi_{t,\alpha}C : \psi_{t,\alpha}\mathcal{M}'_{\mathrm{A}} \underset{\mathcal{O}(\mathrm{A})}{\otimes} \overline{\psi_{t,\alpha}\mathcal{M}''_{\mathrm{A}}} \longrightarrow \mathfrak{C}^{(\mathrm{A},*i\mathbb{R})}_{X_{0,\mathbb{R}}}$$

$$(m,\overline{\mu}) \longmapsto$$

$$\Big[\varphi \mapsto \Big(\frac{i}{2\pi}\Big)^n \operatorname{Rés}_{s=(\alpha\star z)/z} \big\langle C(m,\overline{\mu}), \varphi\, |t|^{2s}\,\chi(t)\big\rangle\Big].$$

Une polarisation est un isomorphisme de $\mathcal{R}_{X\times U_0}$-modules

$$S : \mathcal{M}'' \xrightarrow{\ \sim\ } \mathcal{M}'$$

qui induit une polarisation sur les objets spécialisés.

Théorème

La catégorie des $\mathcal{D}_X$*-modules holonomes réguliers munis d'une structure de twisteur polarisée est* **semi-simple**.

Si $f : X \longrightarrow Y$ *est un morphisme entre variétés projectives lisses, l'image directe d'un module holonome régulier muni d'une structure de twisteur polarisée se décompose en* **somme directe** *de ses modules de cohomologie, qui sont des* $\mathcal{D}_Y$*-modules holonomes réguliers munis d'une structure de twisteur polarisée (le poids est obtenu de la manière usuelle).*

Conjecture

Si X est projective lisse, le foncteur de restriction à $z = 1$ est une équivalence entre la catégorie des $\mathcal{D}_X$-modules holonomes réguliers **munis d'une structure de twisteur polarisée de poids** 0 *et celle des $\mathcal{D}_X$-modules holonomes réguliers* **semi-simples**

Il résulte des travaux de C. Simpson que cette conjecture est satisfaite dans les cas suivants :

– **Les $\mathcal{D}_X$-modules *lisses* et les faisceaux localement constants.**

– X est une surface de Riemann compacte.

Conclusion

Ceci permet d'obtenir le théorème principal.

Le cas général devrait s'appuyer sur les travaux de Jost et Zuo, généralisant en partie ceux de Simpson en dimension plus grande.

Le cas des $\mathcal{D}$-modules holonomes irréguliers est encore très ouvert. Néanmoins, il y a des résultats en dimension 1 : la construction d'une métrique harmonique associée à une connexion méromorphe (irrégulière) irréductible sur une fibré sur une surface de Riemann compacte.