ON PERVERSE SHEAVES AND SEMISIMPLE HOLONOMIC $\mathcal{D}$-MODULES

Muenster, june 2000

Introduction

Il y a quelques années, M. Kashiwara a proposé une conjecture concernant le comportement par image directe des faisceaux pervers semi-simples et même des $\mathcal{D}$-modules holonomes (éventuellement irréguliers) semi-simples : le *théorème de décomposition* de Beilinson-Bernstein-Deligne-Gabber s'appliquerait à ces objets, au moins lorsqu'ils sont définis sur une variété projective, et plus généralement kählerienne compacte.

Ce qui m'a intéressé et étonné dans cette conjecture est que ce théorème s'appliquerait y compris en présence de singularités irrégulières. Certains résultats concernant la théorie de Hodge obtenus par transformation de Fourier sont un indice que ce type de résultat peut être vrai. J'ai pu adapter certains résultats de C. Simpson pour montrer l'existence de métriques harmoniques pour les fibrés vectoriels sur les surfaces de Riemann, qui sont munis d'une connexion méromorphe, et qui sont semi-simples comme $\mathcal{D}$-modules.

Les résultats présentés dans cet exposé sont encore loin du but, mais s'en approchent dans le cas des faisceau pervers (*i.e.* le cas régulier).

Théorème principal. *Soit $\mathcal{F}$ un faisceau localement constant* semi-simple *sur une variété projective lisse X et $f : X \to S$ une application holomorphe à valeurs dans une surface de Riemann compacte S. Alors le complexe image directe $\boldsymbol{R}f_*\mathcal{F}$ se décompose, dans la catégorie dérivée, en somme directe de faisceaux pervers (convenablement décalés) irréductibles sur S.*

C'est un cas particulier de la conjecture de M. Kashiwara, puisque celle-ci

– ne suppose pas que le faisceau pervers $\mathcal{F}$ est lisse (*i.e.* localement constant),
– ne fait pas d'hypothèse sur la dimension de S,
– et vaudrait aussi lorsqu'on remplace « faisceau pervers » par « $\mathcal{D}$-module holonome », pas nécessairement régulier.

Ce qui est connu

(1) Lorsque le faisceau pervers $\mathcal{F}$ est le complexe de de Rham d'un $\mathcal{D}_X$-module holonome sous-jacent à un *module de Hodge polarisable*, le résultat est dû a M. Saito, qui utilise aussi le fait, dû à P. Deligne, qu'un tel faisceau pervers est semi-simple.

(2) Lorsque $\mathcal{F}$ est localement constant (et semi-simple) et S est réduit à un point, C. Simpson a montré que le *théorème de Lefschetz difficile* s'applique à la cohomologie $H^*(X, \mathcal{F})$.

La notion de poids

Un des points essentiels dans la démonstration du théorème de décomposition, soit dans sa version ℓ-adique (BBDG), soit dans sa version complexe (M. Saito), est l'existence d'une notion de *poids* sur les faisceaux ou complexes considérés. Il n'y a pas de morphisme non trivial d'un objet de poids donné vers un objet de poids strictement plus petit. Dans le cas complexe, c'est la structure de Hodge qui permet de fixer le poids. L'existence d'une polarisation est essentielle dans le cas complexe (les structures de Hodge considérées doivent être polarisables).

En l'absence de celle-ci, sous la seule hypothèse de semi-simplicité, on ne voit pas très bien comment attribuer un poids à un système local ou à un faisceau pervers.

Méthodes utilisées

Les résultats reposent sur l'utilisation et l'harmonisation de trois sources d'idées :

– la théorie des *modules de Hodge polarisables* de M. Saito,
– la notion de *variation de structure de twisteur*, introduite par C. Simpson (d'après une suggestion de Deligne),
– l'utilisation des *distributions* et de *formes hermitiennes* sur les $\mathcal{D}$-modules, d'après D. Barlet et M. Kashiwara.

Métriques harmoniques et fibrés de Higgs

Métrique harmonique et semi-simplicité

La notion de *métrique harmonique*, développée par C. Simpson, permet de définir à la fois une notion de poids et une notion de polarisation. Le lien avec la semi-simplicité est conséquence du théorème suivant, obtenu par améliorations successives par de nombreux auteurs (Narasimhan-Seshadri, Donaldson, Corlette, Simpson) :

Théorème. *Soit (V,∇) un fibré holomorphe muni d'une connexion plate sur une variété kählerienne compacte X. Alors (V,∇) admet une métrique harmonique h si et seulement si le faisceau localement constant $\mathcal{F}$ de ses sections horizontales est* semi-simple.

La notion de métrique harmonique est utile lorsque la connexion ∇ n'est pas unitaire (sinon, on utilise une métrique invariante par la connexion, et on peut développer la théorie de Hodge).

Soit $D_V = D'_V + D''_V$ la connexion plate sur le fibré $H = \mathcal{C}^\infty_X \otimes_{\mathcal{O}_X} V$ obtenue à partir de ∇, de sorte que $(V,\nabla) = (\operatorname{Ker} D''_V, D'_V)$. Soit h une métrique sur H. On peut alors trouver une unique connexion $D_E = D'_E + D''_E$ sur H *qui préserve la métrique* h de sorte que, si on pose

$$\theta'_E = D'_E - D'_V, \quad \theta''_E = D''_E - D''_V,$$

la $(0,1)$-forme θ''_E à valeurs dans $\operatorname{End}(H)$ soit l'adjointe, relativement à h, de la $(1,0)$-forme θ'_E.

On dit alors que la métrique h est *harmonique* relativement au fibré holomorphe plat (V,∇) si l'opérateur $D''_E + \theta'_E$ est de carré nul. En considérant les types, ceci est équivalent aux propriétés

$$D''^2_E = 0, \quad D''_E(\theta'_E) = 0, \quad \theta'_E \wedge \theta'_E = 0.$$

Soit alors $E = \operatorname{Ker} D''_E : H \to H$. C'est donc un fibré holomorphe muni d'une 1-forme θ'_E à valeurs dans $\operatorname{End}(E)$, qui est « de courbure nulle », c'est-à-dire qui satisfait $\theta'_E \wedge \theta'_E = 0$: on dit que θ'_E est un *champ de Higgs* pour E.

Il faut aussi se rappeler que la platitude de D_V impose les relations

$$D'^2_E = 0, \quad D'_E(\theta'_E) = 0, \quad D''_E(\theta''_E) = 0.$$

Par conséquent, pour tout $z_o \in \mathbb{C}$, l'opérateur

$$D''_E + z_o\theta''_E$$

est une structure complexe sur H. Le fibré holomorphe associé

$$V_{z_o} = \operatorname{Ker} D''_E + z_o\theta''_E$$

est muni, si $z_o \neq 0$, d'une connexion holomorphe plate

$$\nabla_{z_o} = D'_E + \frac{1}{z_o}\theta'_E.$$

Pour $z_o = 1$ on retrouve (V,∇).

Simpson montre que, si h est harmonique, les identités de la géométrie kählerienne s'appliquent aux opérateurs mixtes

$$\mathcal{D}_\infty = D'_E + \theta''_E, \quad \mathcal{D}_0 = D''_E + \theta'_E$$

qui forment une décomposition de la connexion plate

$$D_V = \mathcal{D}_0 + \mathcal{D}_\infty.$$

Les laplaciens correspondants satisfont

$$\Delta_{D_V} = 2\Delta_{\mathcal{D}_\infty} = 2\Delta_{\mathcal{D}_0},$$

C'est de cette manière qu'il en déduit le théorème de Lefschetz difficile.

Il faut remarquer que cette approche fournit une famille de fibrés plats (V_{z_o}, ∇_{z_o}) pour $z_o \neq 0$, et qu'on a aussi des opérateurs $\mathcal{D}_{z_o} = (D''_E + \theta'_E) + z_o(D'_E + \theta''_E)$ qui satisfont les identités de la géométrie kählerienne, de sorte qu'on montre le théorème de Lefschetz difficile pour tous les faisceaux localement constants $\mathcal{F}_{z_o}$, $z_o \neq 0$ (ils ont en fait la même cohomologie).

Exemple : les variations de structures de Hodge polarisées

Soit $w \in \mathbb{Z}$ et H un fibré vectoriel C^∞ muni d'une décomposition $H = \oplus_{p\in\mathbb{Z}} H^{p,w-p}$, d'une connexion plate $D_V = D'_V + D''_V$ et d'une forme hermitienne non dégénérée k telles que
– la décomposition est k-orthogonale,
– la forme hermitienne $(-1)^p k$ sur $H^{p,w-p}$ est définie positive (*i.e.* une métrique hermitienne),
et (relations de transversalité de Griffiths)

$$D'_V(H^{p,w-p}) \subset \left(H^{p,w-p} \oplus H^{p-1,w-p+1}\right) \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega^1_X$$
$$D''_V(H^{p,w-p}) \subset \left(H^{p,w-p} \oplus H^{p+1,w-p-1}\right) \otimes_{\mathcal{O}_{\overline{X}}} \Omega^1_{\overline{X}}$$

où $\overline{X}$ est la variété complexe conjuguée. On dit que l'on a une *variation de structures de Hodge complexes polarisées de poids w*.

Soit h la métrique pour laquelle la décomposition de Hodge est orthogonale et égale à $(-1)^p k$ sur $H^{p,w-p}$. Les relations de transversalité donnent une décomposition $D'_V = D'_E + \theta'_E$, $D''_V = D''_E + \theta''_E$, et on peut montrer qu'on obtient ainsi une métrique harmonique.

Dans ce cas, les fibrés plats (V_{z_o}, ∇_{z_o}) sont tous isomorphes.

Variations de structures de twisteur polarisées

C. Simpson présente cette notion en énonçant le « meta théorème » :

Si les mots « structure de Hodge » sont remplacés par « structure de twisteur » dans les hypothèses et les conclusions de tout théorème en théorie de Hodge, on obtient encore un énoncé vrai, dont la preuve est analogue à celle de son modèle.

La notion de structure de twisteur est une « déshomogénéisation » de celle de structure de Hodge qui conserve néanmoins la notion de poids.

La graduation d'un fibré sur X est remplacée par la donnée d'ujne extension de ce fibré à $X \times \mathbb{P}^1$. La relation de conjugaison $H^{q,p} = \overline{H^{p,q}}$ est remplacée par une conjugaison géométrique.

Conjugaison géométrique

Soit $f(x)$ une fonction holomorphe sur un ouvert de X. Sa conjuguée $\overline{f}(x) \overset{\text{déf}}{=} \overline{f(x)}$ est une fonction holomorphe sur la variété complexe conjuguée $\overline{X}$.

Sur la sphère de Riemann $\mathbb{P}^1$ munie des deux cartes U_0 et U_∞, et je fixe la coordonnée z sur U_0.

Si $g(z)$ est une fonction sur un ouvert U de $\mathbb{P}^1$, je note $\overline{g}(z) \overset{\text{déf}}{=} g(-1/z)$: c'est une fonction holomorphe sur l'ouvert $\overline{U} = \{-1/z \mid z \in U\}$.

On peut mélanger ces deux notions pour définir la conjuguée d'une fonction $f(x, z)$, qui est holomorphe sur $\overline{X} \times \overline{U}$.

Si $\mathcal{F}$ est un $\mathcal{O}_{X\times U}$-module, alors $\overline{\mathcal{F}}$ est un $\mathcal{O}_{\overline{X}\times\overline{U}}$-module.

Structure de twisteur polarisée sur un espace vectoriel H

Il s'agit de présenter de manière un peu compliquée la donnée d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel H muni d'une forme hermitienne définie positive et d'un « poids » $w \in \mathbb{Z}$.

Une *structure de twisteur de poids w sur H* consiste en la donnée de deux $\mathcal{O}_{U_0}$-modules $\mathcal{H}', \mathcal{H}''$ localement libres de rang d et d'un *recollement* entre $\mathcal{H}'^*$ et $\overline{\mathcal{H}}''$ sur une couronne $\mathbf{A}$ invariante par $\sigma\tau$, recollement présenté comme une forme sesquilinéaire

$$C : \Gamma(\mathbf{A}, \mathcal{H}') \otimes_{\mathcal{O}(\mathbf{A})} \overline{\Gamma(\mathbf{A}, \mathcal{H}'')} \longrightarrow \mathcal{O}(\mathbf{A})$$

qui définit un fibré $\widetilde{\mathcal{H}}$ sur $\mathbb{P}^1$ isomorphe à $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(w)^d$ tel que $\overline{H} = \Gamma(\mathbb{P}^1, \widetilde{\mathcal{H}}(-w))$. On note un twisteur de poids w par $\mathcal{T} = (\mathcal{H}', \mathcal{H}'', C)$.

Réduction au poids 0 (opérateur de Weil) : $\widetilde{\mathcal{T}} = (\mathcal{H}', \mathcal{H}'', (iz)^{-w}C)$.

Twist de Tate : $\mathcal{T}(k) = (\mathcal{H}', \mathcal{H}'', (-z^2)^{-k}C)$.

Dual hermitien : $\mathcal{T}^* = (\mathcal{H}'', \mathcal{H}', C^*)$ avec $C^*(x, \overline{y}) = \overline{C(y, \overline{x})}$. On a $w(\mathcal{T}^*) = -w(\mathcal{T})$, $\mathcal{T}(k)^* = \mathcal{T}^*(-k)$.

Une polarisation est un isomorphisme $S : \mathcal{H}'' \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}'$ tel que

$$C \circ (S \otimes \mathrm{Id}) : \Gamma(\mathbf{A}, \mathcal{H}'') \underset{\mathcal{O}(\mathbf{A})}{\otimes} \overline{\Gamma(\mathbf{A}, \mathcal{H}'')} \longrightarrow \mathcal{O}(\mathbf{A})$$

induise sur $H \otimes_{\mathbb{C}} \overline{H}$ une *forme hermitienne définie positive* h.

$\mathcal{R}$-modules

Le faisceau d'anneaux $\mathcal{R}_{X\times U_0}$ est localement isomorphe au faisceau d'anneaux $\mathcal{O}_{X\times U_0}\langle z\partial_{x_1}, \ldots, z\partial_{x_n}\rangle$. C'est l'anneau de Rees associé à $\mathcal{D}_X$ et sa filtration $F_{\bullet}\mathcal{D}_X$ par l'ordre des opérateurs

$$R_F\mathcal{D}_X = \bigoplus_{k\in\mathbb{N}} F_k(\mathcal{D}_X) \cdot z^k$$

que l'on a déshomogénéisé, *i.e.* $\mathcal{R}_{X\times U_0} = \mathcal{O}_{X\times U_0} \otimes_{\mathbb{C}[z]} R_F\mathcal{D}_X$.

Variations de structures de twisteur polarisées

Une *variation de structures de twisteur de poids* w consiste en la donnée de deux $\mathcal{O}_{X\times U_0}$-modules localement libres de rang d munis d'une z-connexion plate, *i.e.* d'une structure de $\mathcal{R}_{X\times U_0}$-module, et d'un recollement

$$C : \pi_{\mathbf{A}*}\mathcal{H}' \underset{\mathcal{O}(\mathbf{A})}{\otimes} \overline{\pi_{\mathbf{A}*}\mathcal{H}''} \longrightarrow \mathcal{C}_X^\infty(\mathcal{O}(\mathbf{A}))$$

qui est $\mathcal{R}\otimes\overline{\mathcal{R}}$-linéaire, de sorte que la restriction à chaque fibre soit une structure de twisteur de poids w.

Une *polarisation* est un isomorphisme $\mathcal{R}$-linéaire $S : \mathcal{H}'' \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}'$ qui induit une polarisation en restriction à chaque fibre.

Le fibré $\widetilde{\mathcal{H}}$ sur $\mathbb{P}^1$ que l'on obtient par recollement de $\mathcal{H}'^*$ et $\overline{\mathcal{H}''}$ est C^∞ par rapport aux variables de X et holomorphe par rapport à la variable de $\mathbb{P}^1$. Si $\overline{H}$ est le fibré $\pi_*\widetilde{\mathcal{H}}(-w)$, la polarisation permet donc de définir une *métrique* h sur H.

Le fibré $\mathcal{H}'_{|z=1}$ est un sous-fibré holomorphe de H avec une structure de $\mathcal{D}_X$-module, *i.e.* muni d'une connexion holomorphe plate.

Le fibré $\mathcal{H}'_{|z=0}$ est un sous-fibré holomorphe de H avec une structure de $\mathrm{gr}^F\mathcal{D}_X = \mathcal{O}_X[TX]$-module, *i.e.* muni d'un champ de Higgs.

***Théorème* (C. Simpson).** *La métrique ainsi obtenue est harmonique. Réciproquement, toute métrique harmonique sur H s'obtient de cette manière. Si X est kählerienne compacte, la restriction à $z = 1$ induit une équivalence entre la catégorie des variations de structures de twisteur polarisées de poids 0 et celle des représentations semi-simples de $\pi_1(X)$.*

On peut reformuler le théorème de Lefschetz montré par Simpson :

Théorème. *Si X est kählerienne compacte, L l'opérateur de Lefschetz, et si $(\mathcal{H}', C)$ est une structure de twisteur polarisée de poids w sur X, alors pour tout k, la partie primitive*

$$(PH^k(X, \mathcal{H}'), (-1)^{k(k-1)/2} C \circ (L^k \otimes \mathrm{Id}))$$

est une structure de twisteur polarisée de poids $w + k$.

$\mathcal{D}_X$-modules avec structure de twisteur polarisée

La définition est calquée sur celle de module de Hodge.

$\mathcal{R}_{X\times U_0}$-modules holonomes stricts

On dit qu'un $\mathcal{R}_{X\times U_0}$ est *strict* s'il n'a pas de $\mathcal{O}_{U_0}$-torsion.

Exemple. *Un $R_F\mathcal{D}_X$-module $\mathcal{M}$ est strict si et seulement si il est de la forme $R_F M$ pour un $\mathcal{D}_X$-module M muni d'une filtration F compatible avec celle de $\mathcal{D}_X$.*

On dit qu'un $\mathcal{R}_{X\times U_0}$ est *holonome* si sa variété caractéristique, contenue dans $(T^*X) \times U_0$, est contenue dans un ensemble de la forme $\Lambda \times U_0$, où $\Lambda \subset T^*X$ est lagrangienne homogène.

Distributions méromorphes

On remplace le faisceau des fonctions C^∞ de X à valeurs dans $\mathcal{O}(\mathbf{A})$ par celui des distributions sur X à valeurs dans $\mathcal{O}(\mathbf{A})$.

Si α est un nombre complexe, on pose

$$\begin{aligned} \alpha \star z &= z \,\mathrm{Ré}\,\alpha + i(z-1)^2 \,\mathrm{Im}\,\alpha/2 \\ &= z\big(\mathrm{Ré}\,\alpha + i(z+1/z)\,\mathrm{Im}\,\alpha\big). \end{aligned}$$

La fonction

$$0 \neq z \longmapsto \frac{\alpha \star z}{z}$$

est « réelle », *i.e.* invariante par le changement

$$i \longleftrightarrow -i \quad \text{et} \quad z \longleftrightarrow \overline{z} = -1/z.$$

On veut pouvoir considérer la distribution d'une variable t :

$$|t|^{2(\alpha\star z)/z} (\log |t|)^\ell.$$

Cette distribution est à valeurs dans $\mathcal{O}(\mathbf{A})$ si on la multiplie par

$$\Gamma(1 + (\alpha \star z)/z)^{-(\ell+1)}.$$

Les pôles par rapport à z sont *imaginaires purs*.

Une section du faisceau $\mathfrak{Db}_{X_\mathbb{R}}^{(\mathbf{A},*i\mathbb{R})}$ est un objet tel que, multiplié par un polynôme $\lambda(z)$ convenable n'ayant que des zéros imaginaires purs, devienne une distribution à valeurs dans $\mathcal{O}(\mathbf{A})$.

Structure de twisteur sur un $\mathcal{D}_X$-module

Une structure de twisteur de poids w sur un $\mathcal{D}_X$-module M consiste en la donnée de deux $\mathcal{R}_{X\times U_0}$-modules *holonomes stricts* $\mathcal{M}', \mathcal{M}''$ de restriction M à $z=1$, et d'un accouplement $\mathcal{R}\otimes_{\mathcal{O}(\mathbf{A})}\overline{\mathcal{R}}$-linéaire

$$C : \pi_{\mathbf{A}*}\mathcal{M}' \underset{\mathcal{O}(\mathbf{A})}{\otimes} \overline{\pi_{\mathbf{A}*}\mathcal{M}''} \longrightarrow \mathfrak{Db}_{X_\mathbb{R}}^{(\mathbf{A},*i\mathbb{R})}.$$

On suppose de plus que $\mathcal{M}', \mathcal{M}''$ sont *spécialisables* le long de tout germe de fonction holomorphe et que les spécialisés sont des objets du même type et que, en dimension 0 on obtient un twisteur de poids $w+\cdots$

Une polarisation est un isomorphisme $S : \mathcal{M}'' \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}'$ de $\mathcal{R}_{X\times U_0}$-modules qui induit une polarisation sur les objets spécialisés.

Théorème. *La catégorie des $\mathcal{D}_X$-modules holonomes réguliers munis d'une structure de twisteur polarisée est semi-simple. Si $f : X \to Y$ est un morphisme entre variétés projectives lisses, l'image directe d'un module holonome régulier muni d'une structure de twisteur polarisée se décompose en somme directe de ses modules de cohomologie, qui sont des $\mathcal{D}_Y$-modules holonomes réguliers munis d'une structure de twisteur polarisée (le poids est obtenu de la manière usuelle).*

À l'aide de ce théorème, la conjecture de Kashiwara se réduit à la conjecture suivante :

Conjecture. *Si X est projective lisse, le foncteur de restriction à $z=1$ est une équivalence entre la catégorie des $\mathcal{D}_X$-modules holonomes réguliers* munis d'une structure de twisteur polarisée de poids 0 *et celle des $\mathcal{D}_X$-modules holonomes réguliers* semi-simples

Il résulte des travaux de C. Simpson que cette conjecture est satisfaite dans les cas suivants :
– Les $\mathcal{D}_X$-modules *lisses* et les faisceaux localement constants.
– X est une surface de Riemann compacte.

Conclusion

Ceci permet d'obtenir le théorème principal.

Le cas général devrait s'appuyer sur les travaux de Jost et Zuo, généralisant en partie ceux de Simpson en dimension plus grande.

Le cas des $\mathcal{D}$-modules holonomes irréguliers est encore très ouvert. Néanmoins, il y a des résultats en dimension 1 : la construction d'une métrique harmonique associée à une connexion méromorphe (irrégulière) irréductible sur une fibré sur une surface de Riemann compacte.