ASPECTS MÉTRIQUES DE LA SEMI-SIMPLICITÉ

par

Claude Sabbah

Table des matières

Introduction

Si X est une variété projective lisse sur $\mathbb{C}$ de dimension n, le théorème de Lefschetz classique affirme que, si $L \in H^2(X, \mathbb{Q})$ est la première classe de Chern d'un fibré en droites ample (plus généralement la classe $\in H^2(X, \mathbb{C})$ d'une 2-forme de Kähler), les applications $L^k : H^{n-k}(X, \mathbb{Q}) \to H^{n+k}(X, \mathbb{Q})$ sont des isomorphismes pour tout $k \geqslant 1$. La démonstration analytique montre plus précisément que ce sont des isomorphismes après tensorisation par $\mathbb{C}$, mais cela revient bien sûr au même.

Le même résultat reste-t-il vrai si on considère la cohomologie à coefficients dans un faisceau localement constant de $\mathbb{Q}$-espaces vectoriels de dimension finie ? (Un tel faisceau correspond à une représentation linéaire de dimension finie du groupe fondamental.) Il est connu (et montré de la même manière) que tel est bien le cas si la représentation est *unitaire*, mais on peut trouver des exemples simples de représentations pour lesquelles le résultat est faux (*cf.* exemple 1.3.2).

Une condition suffisante pour la véracité du résultat est que le faisceau localement constant soit *semi-simple* (sur $\mathbb{Q}$ ou après tensorisation par $\mathbb{C}$, peu importe, voir la remarque (1) de l'annexe 1.6). Ce résultat de Corlette et Simpson sera expliqué à l'exposé 1.

D'un autre côté, si $f : X \to Y$ est une application *lisse* entre deux variétés projectives lisses, les faisceaux localement constants de fibre $H^k(f^{-1}(y), \mathbb{Q})$ sont semi-simples : ceci provient du fait qu'ils (plus précisément leur partie primitive) sous-tendent une variation de structure de Hodge polarisée. De plus, le théorème de Lefschetz difficile vaut pour chaque fibre $f^{-1}(y)$, et cela permet à Deligne d'en déduire que le complexe $\boldsymbol{R}f_*\mathbb{Q}_X$ se décompose, dans la catégorie dérivée $D^b(\mathbb{Q}_Y)$, en somme directe de ses faisceaux de cohomologie. Ainsi, c'est bien le complexe qui est "semi-simple" (bien que "semi-simple" n'ait pas de sens dans la catégorie dérivée).

Les méthodes de Corlette et Simpson permettent d'étendre ce résultat au cas des faisceaux $H^k(f^{-1}(y), \mathscr{L})$, lorsque $\mathscr{L}$ est localement constant semi-simple sur X. Il faut notamment utiliser le fait non trivial que la restriction de $\mathscr{L}$ aux fibres $f^{-1}(y)$ reste semi-simple, afin d'appliquer Lefschetz difficile dans les fibres.

Ainsi, le théorème de Lefschetz difficile et la semi-simplicité sont intimement liés.

Ces notes présenteront une extension de ces résultats aux situations singulières. Si on remplace ci-dessus le mot « faisceau localement constant » par « faisceau pervers », les résultats s'étendent sans hypothèse de lissité sur X, Y ou f. Ceci est l'énoncé d'une conjecture de M. Kashiwara, démontrée par voie arithmétique par V. Drinfeld [**6**]. J'exposerai des éléments de la démonstration analytique, dont une partie est due à T. Mochizuki [**13, 14**], et l'autre se trouve dans [**16**].

Bien que la théorie ait essentiellement un aspect global, beaucoup d'énoncés sont de nature locale (par exemple ceux sur la spécialisation) et s'appliquent à des situations plus classiquement étudiées en théorie des singularités. Les méthodes ci-dessus permettent aussi de faire le lien entre la théorie de Hodge et la théorie de la spécialisation des formes hermitiennes, telle qu'elle est faite par D. Barlet (*cf.* par exemple [**1, 2, 3**]).

Il existe aussi une sous-catégorie de la catégorie des $\mathscr{D}$-modules avec structure de twisteur polarisée : ce sont les objets *intégrables.* Il correspondent, dans le cas lisse des variations de structure de twisteur polarisée, aux variations de structures de Ceccoti-Vaffa (sans structure réelle) considérées par C. Hertling [**8**]. Je ne ferai pas le lien dans ces notes, et je renvoie à [**16**, Chap. 7] pour plus de détails.

1. Le théorème de Lefschetz difficile

Dans cet exposé, X désigne une variété complexe compacte munie d'une forme de Kähler ω. Cette forme définit une métrique hermitienne sur le fibré tangent et par suite un laplacien Δ. L'opérateur de Lefschetz $\omega\wedge\bullet$ sur les formes différentielles est noté L_ω ou L.

1.1. L'énoncé classique. Puisque $2\Delta=\Delta'=\Delta''$ et L commutent (théorie de Hodge), l'opérateur L laisse invariant l'espace $\mathcal{H}(X)$ des formes harmoniques. On en déduit que les composantes de Lefschetz d'une forme harmonique sont encore harmoniques. Par suite, l'opérateur L induit sur l'espace (gradué) $\mathcal{H}(X)=\oplus_r\mathcal{H}^r(X)$ des formes harmoniques une structure de Lefschetz. Cette structure est compatible à la bigraduation par le type p,q, donnant ainsi naissance à un *structure de Hodge-Lefschetz.*

Notons Q la forme $\mathbb{C}$-bilinéaire sur l'espace $\mathcal{H}^{n-r}(X)$ définie par

$$Q(\eta,\eta')=\int_X\varepsilon(n-r)\cdot\eta\wedge\eta'\wedge\omega^r,$$

où $\varepsilon(k)=(-1)^{k(k-1)/2}$. Alors la forme sesquilinéaire $Q(C\bullet,\overline{\bullet})$ est hermitienne sur $\mathcal{H}(X)$ et définie positive sur la partie primitive $\mathcal{P}(X)=\oplus_{r\geqslant 0}\mathcal{P}^{n-r}$. On en déduit :

***Théorème 1.1.1* (de Hodge-Lefschetz).** *L'espace $\mathcal{H}(X)$ des formes harmoniques sur une variété kählérienne compacte (X,ω), muni de l'opérateur de Lefschetz L et de la forme bilinéaire Q, est une structure de Hodge-Lefschetz de poids $n=\dim X$, polarisée par la forme Q.* □

De même que la décomposition de Hodge de la cohomologie de de Rham est « plus intrinsèque » que la décomposition des formes harmoniques suivant le type (p,q), de même il existe une version plus intrinsèque du théorème de Hodge-Lefschetz sur les formes harmoniques.

Remarquons d'abord que, si ω est une 2-forme *d-fermée* sur X, l'opérateur $\omega\wedge: A^r(X,\mathbb{C})\to A^{r+2}(X,\mathbb{C})$ envoie $Z^r(X,\mathbb{C})$ dans $Z^{r+2}(X,\mathbb{C})$ et $B^r(X,\mathbb{C})$ dans $B^{r+2}(X,\mathbb{C})$: si $d\eta=0$, on a $d(\omega\wedge\eta)=d\omega\wedge\eta+\omega\wedge d\eta=0$; de même, $\omega\wedge d\eta=d(\omega\wedge\eta)$.

Ainsi, ω définit un homomorphisme $L_\omega : H^r_{\mathrm{DR}}(X,\mathbb{C}) \to H^{r+2}_{\mathrm{DR}}(X,\mathbb{C})$. Je dis que L_ω ne dépend que de la classe de ω dans $H^2_{\mathrm{DR}}(X,\mathbb{C})$: en effet, si θ est une 1-forme, on a, pour η dans $Z^r(X,\mathbb{C})$,

$$\begin{aligned}(\omega + d\theta)\wedge\eta &= \omega\wedge\eta + d\theta\wedge\eta\\ &= \omega\wedge\eta + d(\theta\wedge\eta) \quad \text{car } d\eta = 0.\end{aligned}$$

La classe $c_\omega \in H^2_{\mathrm{DR}}(X,\mathbb{C})$ d'une forme de Kähler ω est dans le sous-espace $H^{1,1}(X,\mathbb{C})$ (bien défini par le théorème de décomposition de Hodge).

En général, on dit que $c \in H^{1,1}(X,\mathbb{C})$ est une *classe de Kähler* si c admet un représentant ω qui est une forme de Kähler.

***Exemple 1.1.2* (important).** Soit X une sous-variété complexe fermée (donc compacte) de l'espace projectif $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$. Soit $\mathscr{O}(1)$ le fibré en droites canonique sur $\mathbb{P}^N$, et soit $\mathscr{O}_X(1)$ la restriction de ce fibré à X : c'est un fibré en droites holomorphes sur X. Il admet donc une classe de Chern $c \in H^{1,1}(X,\mathbb{C})$. Alors c est une classe de Kähler.

On peut appliquer le théorème de décomposition de Hodge et le théorème de Hodge-Lefschetz pour obtenir :

***Théorème 1.1.3* (de Lefschetz difficile pour la cohomologie de de Rham)**
Soit X une variété complexe compacte et soit c une classe de Kähler. Alors pour tout $r \geqslant 1$ et tous $p,q \geqslant 0$ avec $p+q = n-r$, l'endomorphisme L_c induit des isomorphismes

$$\begin{aligned}L^r_c &: H^{n-r}_{\mathrm{DR}}(X,\mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} H^{n+r}_{\mathrm{DR}}(X,\mathbb{C})\\ L^r_c &: H^{p,q}(X,\mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} H^{p+r,q+r}(X,\mathbb{C}).\end{aligned}$$
□

1.2. Généralisation à un système local de coefficients correspondant à une représentation unitaire. Il est possible d'étendre les résultats précédents à la cohomologie de de Rham d'un fibré hermitien plat. Soit (H,h_H) est un fibré hermitien C^∞ sur la variété kählérienne (X,ω). Supposons que la métrique hermitienne h_H soit *plate*, *i.e.* supposons qu'il existe une connexion métrique D sur H telle que $D^2 = 0$. Soit (V,∇) le fibré holomorphe plat associé. On note $H_{\mathrm{DR}}(X,V) = H_{\mathrm{DR}}(X,H)$. Le théorème de décomposition de Hodge admet la généralisation suivante :

***Théorème 1.2.1* (décomposition de Hodge pour les fibrés hermitiens plats)**
Dans ces conditions, on a une décomposition canonique

$$H^r_{\mathrm{DR}}(X,V) = \bigoplus_{p+q=r} H^{p,q}(X,V)$$

et l'espace $H^{q,p}(X,V)$ s'identifie à $\overline{H^{p,q}(X,V^*)}$, où V^* désigne le fibré dual de V (muni de la métrique et de la connexion déduites de celles sur V). □

On en déduit que Δ_D commute à L_ω. Par suite, l'opérateur de Lefschetz préserve les sections harmoniques et on obtient de même, à partir de l'énoncé sur les sections harmoniques :

Théorème 1.2.2 **(de Lefschetz difficile pour les fibrés hermitiens plats)**
Dans ces conditions, soit c une classe de Kähler. Alors pour tout $r \geqslant 1$ et tous $p, q \geqslant 0$ avec $p+q=n-r$, l'endomorphisme L_c induit des isomorphismes

$$
\begin{aligned}
L_c^r &: H^{n-r}_{\mathrm{DR}}(X,V) \xrightarrow{\sim} H^{n+r}_{\mathrm{DR}}(X,V)\\
L_c^r &: H^{p,q}(X,V) \xrightarrow{\sim} H^{p+r,q+r}(X,V).
\end{aligned}
\qquad \square
$$

Remarque 1.2.3. Soit $\mathscr{L} = \ker[\nabla : V \to \Omega^1_X \otimes_{\mathscr{O}_X} V]$ le faisceau localement constant des sections horizontales de V. Par hypothèse, il correspond à une représentation *unitaire* du groupe fondamental de X. On a $H^k_{\mathrm{DR}}(X,V) = H^k(X,\mathscr{L})$, de sorte que le théorème 1.2.2 implique le théorème de Lefschetz difficile pour la cohomologie de X à coefficients dans $\mathscr{L}$.

1.3. Un contre-exemple. Soit donc $\mathcal{V}$ un faisceau localement constant de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels de rang fini d sur la variété kählérienne compacte X, et soit (V,∇) le fibré holomorphe plat correspondant : $V = \mathscr{O}_X \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{V}$ et ∇ est la connexion pour laquelle $\mathcal{V}$ est le faisceau des sections horizontales. Soit H le fibré C^∞ associé à V et D_V la connexion induite par ∇. Puisque le complexe de de Rham de (H, D_V) est une résolution de $\mathcal{V}$, on a

$$H^r(X,\mathcal{V}) = H^r_{\mathrm{DR}}(X,H).$$

Si ω est une 2-forme de Kähler sur X, de classe $c \in H^2_{\mathrm{DR}}(X,\mathbb{C})$, l'opérateur de Lefschetz L_ω induit un opérateur $L_c : H^r(X,\mathcal{V}) \to H^{r+2}(X,\mathcal{V})$.

Question 1.3.1. *Est-ce que le théorème de Lefschetz difficile est vrai dans cette situation ?*

Exemple 1.3.2. La réponse à cette question peut être négative. Soit en effet $\mathcal{V}$ un faisceau localement constant de rang d sur une surface de Riemann compacte X. La seule chose à vérifier dans ce cas est que $L_c : H^0(X,\mathcal{V}) \to H^2(X,\mathcal{V})$ est un isomorphisme. Il est nécessaire, pour cela, que ces deux espaces aient même dimension.

Remarquons d'abord que, si $\mathcal{V}^*$ désigne le système local dual de $\mathcal{V}$, on a, par dualité de Poincaré, l'égalité $\dim H^2(X,\mathcal{V}) = \dim H^0(X,\mathcal{V}^*)$. Nous allons donner un exemple pour lequel $\dim H^0(X,\mathcal{V}^*) \neq \dim H^0(X,\mathcal{V})$.

Pour cela, supposons que $\mathcal{V}$ est extension du faisceau constant $\mathcal{V}_2 = \mathbb{C}_X$ par un faisceau localement constant $\mathcal{V}_1$ qui est *irréductible et non constant*. La suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{V}_1 \longrightarrow \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}_2 \longrightarrow 0$$

donne deux suites exactes longues

$$0 \longrightarrow H^0(X,\mathcal{V}_1) \longrightarrow H^0(X,\mathcal{V}) \longrightarrow H^0(X,\mathcal{V}_2) \longrightarrow H^1(X,\mathcal{V}_1) \longrightarrow \cdots$$
$$0 \longrightarrow H^0(X,\mathcal{V}_2^*) \longrightarrow H^0(X,\mathcal{V}^*) \longrightarrow H^0(X,\mathcal{V}_1^*) \longrightarrow \cdots$$

et, puisque le faisceau localement constant $\mathcal{V}_1$ est irréductible et non constant, il n'a pas de section globale ; autant pour son dual $\mathcal{V}_1^*$; enfin $H^0(X,\mathcal{V}_2) = H^0(X,\mathcal{V}_2^*) = \mathbb{C}$. On en déduit d'une part que $H^0(X,\mathcal{V}^*) = \mathbb{C}$. D'autre part, on aura $H^0(X,\mathcal{V}) = 0$ dès que l'application $H^0(X,\mathcal{V}_2) \to H^1(X,\mathcal{V}_1)$ n'est pas triviale. Dans cet exemple, cette application caractérise en fait l'extension. Plus précisément on a :

Lemme. *Soit $\sigma \in H^1(X,\mathcal{V}_1)$. Alors σ définit une extension $\mathscr{V}$ pour laquelle l'image de $1 \in H^0(X,\mathcal{V}_2) = \mathbb{C}$ est σ.*

Démonstration. Soit $\mathscr{U} = (U_\alpha)$ un recouvrement de X tel que $\sigma \in H^1(\mathscr{U},\mathcal{V}_1)$(1). On pose $\sigma = (\sigma_{\alpha,\beta})$. On choisit pour $\mathcal{V}$ le faisceau $\mathcal{V}_{1|U_\alpha} \oplus \mathbb{C}_{U_\alpha}$ sur chaque U_α, et on recolle sur $U_\alpha \cap U_\beta$ par l'isomorphisme

$$\mathcal{V}_{1|U_\alpha\cap U_\beta} \oplus \mathbb{C}_{U_\alpha\cap U_\beta} \xrightarrow{\begin{pmatrix}\mathrm{Id}_{\mathcal{V}_1} & \sigma_{\alpha,\beta}\\ 0 & 1\end{pmatrix}} \mathcal{V}_{1|U_\alpha\cap U_\beta} \oplus \mathbb{C}_{U_\alpha\cap U_\beta}.$$

On vérifie que l'application $H^0(\mathscr{U},\mathbb{C}_X) \to H^1(\mathscr{U},\mathcal{V}_1)$ envoie 1 sur σ. $\square$

En conclusion, tout faisceau localement constant irréductible et non constant $\mathcal{V}_1$ tel que $H^1(X,\mathcal{V}_1) \neq 0$ permet de donner une réponse négative à la question.

Il reste à exhiber de tels faisceaux. Rappelons que, si $\mathcal{V}$ est un faisceau localement constant sur X, on a

$$\begin{aligned}\chi(X,\mathcal{V}) &\overset{\text{déf}}{=} \dim H^0(X,\mathcal{V}) - \dim H^1(X,\mathcal{V}) + \dim H^2(X,\mathcal{V})\\ &= \operatorname{rg}\mathcal{V}\cdot\chi(X,\mathbb{C}_X) = (2-2g)\operatorname{rg}\mathcal{V},\end{aligned}$$

où g est le genre de la surface de Riemann X.

Notons alors que, pour un faisceau localement constant irréductible et non constant $\mathcal{V}_1$, on a $\chi(X,\mathcal{V}_1) = -\dim H^1(X,\mathcal{V}_1) = (2-2g)\operatorname{rg}\mathcal{V}_1$. Donc, tout faisceau localement constant irréductible et non constant sur une surface de Riemann de genre $g \geqslant 2$ permet de construire un exemple.

Il est simple de construire un tel faisceau de rang 1 : si $a_1,\dots,a_g,b_1,\dots,b_g$ désignent les générateurs de $\pi_1(X)$ introduits plus haut, un faisceau localement constant de rang 1, c'est-à-dire un homomorphisme $\pi_1(X) \to \mathbb{C}^*$, est déterminé par la donnée de $2g$ nombres $\alpha_1,\dots,\alpha_g,\beta_1,\dots,\beta_g \in \mathbb{C}^*$ (la relation $\prod_i \alpha_i\beta_i\alpha_i^{-1}\beta_i^{-1} = 1$ est trivialement satisfaite en rang 1). La représentation est irréductible, car de rang 1, et elle est non constante dès que l'un des α_i ou β_i n'est pas égal à 1.

(1)On rappelle que $H^1(X,\mathcal{V}_1) = \cup_{\mathscr{U}} H^1(\mathscr{U},\mathcal{V}_1)$.

Nous allons aborder la question 1.3.1 par les méthodes de la théorie de Hodge. Pour cela, fixons une métrique hermitienne quelconque sur le fibré H. Nous ne supposons pas *a priori* que la connexion D_V est compatible à la métrique. La théorie de Hodge s'applique au laplacien Δ_{h_H,D_V}, et donne une décomposition $(\ ,\ )$-orthogonale

$$A^r(X,H)=\mathcal{H}^r_{\Delta_{h_H,D_V}}\oplus \operatorname{Im} D_V\oplus \operatorname{Im} D_V^*,$$

(l'orthogonalité de $\operatorname{Im} D_V$ et $\operatorname{Im} D_V^*$ provient de la platitude de D_V). On en déduit que toute classe de cohomologie dans $H^r(X,\mathcal{V})$ est représentée de manière unique par une section harmonique dans $\mathcal{H}^r_{\Delta_{h_H,D_V}}$. Néanmoins, sans autre hypothèse, nous ne pouvons pas affirmer que L_ω commute à Δ_{h_H,D_V}, donc que les composantes de la décomposition de Lefschetz d'une section harmonique sont encore harmoniques.

1.4. La notion de métrique harmonique. Nous expliquons ici une construction due à C. Simpson [**20, 21**].

Soit X une variété analytique complexe et (V,∇) un fibré holomorphe à connexion *plate* sur X, correspondant à une représentation linéaire de dimension finie du groupe fondamental de X. Considérons, comme plus haut, le fibré C^∞ associé à V, noté $H\overset{\text{déf}}{=}\mathscr{C}^\infty_X\otimes_{\mathscr{O}_X}V$, que nous munissons de la connexion $D_V=D'_V+D''_V$ telle que $(V,\nabla)=(\ker D''_V,D'_V)$.

Choisissons une métrique hermitienne h_H sur H. Si la représentation n'est pas unitaire, il n'est pas possible de choisir une métrique telle que la connexion plate D_V soit métrique. Regardons alors le défaut ainsi obtenu : il existe des connexions notées D'_E (de type $(1,0)$) et D''_E (de type $(0,1)$), et une $(1,0)$-forme θ'_E à valeurs dans $\operatorname{End}(H)$ telles que, en notant θ''_E l'adjoint de θ'_E par rapport à h_H, nous ayons, pour toutes sections locales u,v de H,

$$\begin{aligned}
d'h_H(u,\overline{v})&=h_H(D'_Eu,\overline{v})+h_H(u,\overline{D''_Ev}),\\
d''h_H(u,\overline{v})&=h_H(D''_Eu,\overline{v})+h_H(u,\overline{D'_Ev}),\\
h_H(\theta'_Eu,\overline{v})&=h_H(u,\overline{\theta''_Ev}),\\
D'_V=D'_E+\theta'_E,&\quad D''_V=D''_E+\theta''_E.
\end{aligned}$$

Ainsi, D_E est une connexion métrique pour h_H, mais ce n'est pas la connexion de Chern pour la structure holomorphe V.

Ces objets sont déterminés de manière unique par les conditions précédentes. Il faut remarquer que, en appliquant d' ou d'' aux trois premières lignes ci-dessus, on voit que D''^2_E est adjoint de D'^2_E, que $D''_E(\theta'_E)$ est adjoint de $D'_E(\theta''_E)$ et que $D'_ED''_E+D''_ED'_E$ est auto-adjoint par rapport à h_H.

***Définition 1.4.1* (métrique harmonique).** Le triplet (H,D_V,h_H) (ou (V,∇,h_H), ou simplement h_H, si (V,∇) est fixé) est dit *harmonique* si l'opérateur $D''_E+\theta'_E$ est de carré nul.

En considérant les types, ceci est équivalent aux relations

$$D_E''^2 = 0, \quad D_E''(\theta_E') = 0, \quad \theta_E' \wedge \theta_E' = 0.$$

Par adjonction, ceci implique aussi

$$D_E'^2 = 0, \quad D_E'(\theta_E'') = 0, \quad \theta_E'' \wedge \theta_E'' = 0.$$

De plus, la platitude de D_V implique alors

$$D_E'(\theta_E') = 0, \quad D_E''(\theta_E'') = 0, \quad D_E'D_E'' + D_E''D_E' = -(\theta_E'\theta_E'' + \theta_E''\theta_E').$$

Soit $E = \ker D_E'' : H \to H$. Puisque $(D_E'')^2 = 0$, c'est un fibré holomorphe. Il est de plus muni d'une 1-forme holomorphe θ_E' à valeurs dans $\mathrm{End}(E)$, qui satisfait à $\theta_E' \wedge \theta_E' = 0$. On dit que (E, θ_E') est un *fibré de Higgs* et que θ_E' est le *champ de Higgs associé*. On a ainsi construit une nouvelle structure holomorphe sur H, distincte de V en général.

Dans cette construction, la connexion D_V est compatible à la métrique h_H si et seulement si $\theta_E', \theta_E'' = 0$, et on a $D_V = D_E$. Le fibré de Higgs se réduit alors à $(V, 0)$.

Exemple 1.4.2 **(variations de structures de Hodge polarisées)**
Soit $H = \oplus_{p\in\mathbb{Z}} H^{p,w-p}$ un fibré vectoriel complexe C^∞ sur X, où $w \in \mathbb{Z}$ est un entier fixé, muni d'une connexion *plate* $D_V = D_V' + D_V''$ et d'une forme $(-1)^w$-hermitienne k (*i.e.* $k(y, \overline{x}) = (-1)^w \overline{k(x, \overline{y})}$) qui satisfait aux propriétés suivantes :

– la connexion D_V est compatible à k, *i.e.* satisfait aux relations

$$dk(u, v) = k(D_V u, v) + k(u, D_V v),$$

– la décomposition de H en somme directe est k-orthogonale,

– pour tout p, la forme hermitienne $i^{-w}(-1)^p k$ est une métrique hermitienne sur $H^{p,w-p}$, *i.e.* $(-1)^p k$ est définie positive sur les fibres de $H^{p,w-p}$,

– les *relations de transversalité de Griffiths* sont satisfaites, *i.e.*

$$D_V' A^0(X, H^{p,w-p}) \subset A^{1,0}(X, H^{p,w-p}) \oplus A^{1,0}(H^{p-1,w-p+1})$$
$$D_V'' A^0(X, H^{p,w-p}) \subset A^{0,1}(X, H^{p,w-p}) \oplus A^{0,1}(H^{p+1,w-p-1}).$$

La donnée ci-dessus s'appelle une *variation de structure de Hodge polarisée.*

Remarque 1.4.3. On peut présenter ces relations de transversalité de manière différente en introduisant la suite décroissante des fibrés $F^pH \overset{\text{déf}}{=} \oplus_{p'\geqslant p} H^{p',w-p'}$. La deuxième condition montre que D_V'' est une connexion de type $(0,1)$ sur F^pH, donc que $F^pV \overset{\text{déf}}{=} V \cap F^pH$ est un sous-fibré holomorphe de V. La première relation montre alors que $\nabla F^pV \subset \Omega_X^1 \otimes F^{p-1}V$.

Réciproquement, supposons satisfaites les relations de transversalité pour les sous-fibrés F^pH définis à partir des $H^{p,q}$ comme ci-dessus, c'est-à-dire que

– $D_V'' A^0(X, F^pH) \subset A^{0,1}(X, F^pH)$, et
– $D_V' A^0(X, F^pH) \subset A^{1,0}(X, F^{p-1}H)$.

Alors les relations de transversalité données plus haut pour les $H^{p,w-p}$ sont satisfaites. Ceci résulte de la propriété de polarisation : en effet, soit v une section locale de $H^{p,w-p}$ et soit $(D''_V v)_{p+\ell}$ la composante de $D''_V v$ sur $H^{p+\ell,w-p-\ell}$. Alors, pour toute section locale u de $H^{p+\ell,w-p-\ell}$, on a

$$k(u, D''_V v) + k(D'_V u, v) = d'k(u, v) = 0$$

si $\ell \neq 0$. Mais si $\ell \geqslant 2$, $D'_V u$ est une section de $F^{p+1}H$, donc est k-orthogonal à v. Finalement, puisque $\pm k$ est définie positive sur $H^{p+\ell,w-p-\ell}$, on en déduit que $(D''_V v)_{p+\ell} = 0$ pour tout $\ell \geqslant 2$. On raisonne de même pour D'_V.

Notons alors $D'_V = D'_E + \theta'_E$ et $D''_V = D''_E + \theta''_E$ les décompositions correspondant aux relations de transversalité. Alors la métrique hermitienne h_H définie par les deux conditions suivantes :

– en restriction à $H^{p,w-p}$, h_H est égale à $(-1)^p k$,
– la décomposition en somme directe de H est h_H-orthogonale,

est une métrique *harmonique*, et les objets D'_E, D''_E, θ'_E et θ''_E sont bien ceux qui sont associés à (H, D_V, h_H) par la construction générale indiquée plus haut. En effet, soit u une section locale de $H^{p+1,w-p-1}$ et v une section locale de $H^{p,w-p}$. On a alors

$$0 = d'k(u, v) = k(\theta'_E u, v) + k(u, \theta''_E v),$$

puisque, par orthogonalité, on a $k(D'_E u, v) = 0$ et $k(u, D''_E v) = 0$. On en déduit que θ''_E est l'adjoint de θ'_E, pour k ou pour h_H. On montre de même la compatibilité de D_E avec la métrique h_H. La nullité de $(D''_E + \theta'_E)^2$ provient alors de la platitude de D_V en considérant les parties homogènes de la relation $D_V^2 = 0$, toujours à l'aide de l'orthogonalité.

Il est remarquable que les identités kählériennes classiques s'étendent dans une situation où la connexion D_V n'est pas compatible à la métrique. Néanmoins, la décomposition de D_V à considérer pour obtenir des formules analogues aux formules classiques n'est pas la décomposition en type $D_V = D'_V + D''_V$, mais la décomposition

$$D_V = \mathcal{D}_0 + \mathcal{D}_\infty, \qquad \mathcal{D}_0 = D''_E + \theta'_E \quad \text{et} \quad \mathcal{D}_\infty = D'_E + \theta''_E.$$

Il faut noter que l'on a

$$\mathcal{D}_0^2 = 0, \quad \mathcal{D}_\infty^2 = 0, \quad \mathcal{D}_0\mathcal{D}_\infty + \mathcal{D}_\infty\mathcal{D}_0 = 0, \tag{1.4.4}$$

ainsi qu'il résulte de l'harmonicité de la métrique h_H.

Théorème 1.4.5. *Si la métrique h_H est harmonique, les identités kählériennes s'appliquent en remplaçant d'' par $\mathcal{D}_0$ et d' par $\mathcal{D}_\infty$. De plus, on a :*

$$\Delta_{D_V} = 2\Delta_{\mathcal{D}_0} = 2\Delta_{\mathcal{D}_\infty}.$$

Enfin, l'opérateur de Lefschetz L_ω commute au laplacien Δ_{D_V}

Démonstration. Puisque l'opérateur D_E est compatible à la métrique, son adjoint se calcule par la formule $D_E^* = - \star D_E \star$ (où $\star$ désigne l'opérateur de Hodge). On en déduit l'identité

$$[\Lambda, D'_E] = iD''^*_E,$$

si Λ désigne l'adjoint de L, et de même les autres identités kählériennes, en remplaçant d' par D'_E et d'' par D''_E. Néanmoins, ces identités ne sont pas utilisables directement pour obtenir une égalité de laplaciens, car il faut pour cela démontrer les analogues des identités $d'd''^* + d''^*d' = 0$, qui nécessitent aussi une condition de platitude.

On a donc $[L, D'^*_E] = iD''_E$ et $[L, D''^*_E] = -iD'_E$. Par ailleurs, calculons θ'^*_E dans des coordonnées locales osculatrices à des coordonnées euclidiennes, qui existent par kählérianité. On écrit l'opérateur θ'_E sous la forme $\sum_k \theta'_{E,k} dz_k \wedge$. L'adjoint de $\theta'_{E,k}$ est $\theta''_{E,k}$ par hypothèse, et l'adjoint de l'opérateur $dz_k\wedge$ est $\iota_{\partial_{z_k}}$ modulo $O(\|z\|^2)$. On a donc

$$\begin{aligned}[L, \theta'^*_E] &= \sum_k \theta''_{E,k} [L, \iota_{\partial_{z_k}}] \mod O(\|z\|^2) \\ &= -i \sum_k \theta''_{E,k} d\overline{z}_k \mod O(\|z\|^2),\end{aligned}$$

puisque $\iota_{\partial_{z_k}}(\omega) = id\overline{z}_k \mod O(\|z\|^2)$. On en déduit que $[L, \theta'^*_E] = -i\theta''_E$ en évaluant la formule précédente au centre des coordonnées.

On voit ainsi que les identités classiques du type $[L, d'^*] = id''$ restent satisfaites si on remplace d' par $\mathcal{D}_\infty$ et d'' par $\mathcal{D}_0$. De plus, les relations (1.4.4) permettent d'obtenir les analogues des identités $d'd''^* + d''^*d' = 0$, et on peut conclure comme dans le cas classique. □

On déduit du théorème 1.4.5 que les espaces de sections harmoniques $\mathcal{H}^r_{D_V}(X, H)$, $\mathcal{H}^r_{\mathcal{D}_0}(X, H)$ et $\mathcal{H}^r_{\mathcal{D}_\infty}(X, H)$ coïncident. On note cet espace $\mathcal{H}^r(X, H)$. Le théorème de Hodge pour ces laplaciens donne donc les décompositions (,)-orthogonales

$$\begin{aligned}A^r(X, H) &= \mathcal{H}^r(X, H) \oplus \operatorname{Im} \mathcal{D}_0 \oplus \operatorname{Im} \mathcal{D}_0^* \\ &= \mathcal{H}^r(X, H) \oplus \operatorname{Im} \mathcal{D}_\infty \oplus \operatorname{Im} \mathcal{D}_\infty^* \\ &= \mathcal{H}^r(X, H) \oplus \operatorname{Im} D_V \oplus \operatorname{Im} D_V^*.\end{aligned}$$

De la dernière assertion du théorème 1.4.5, on déduit comme au théorème 1.1.3 et du théorème de Corlette expliqué à la section suivante :

***Théorème 1.4.6* (C. Simpson [20]).** *Si $\mathcal{V}$ est un faisceau localement constant semi-simple sur une variété kählérienne compacte X, l'opérateur de Lefschetz associé à une classe de Kähler $c \in H^{1,1}(X, \mathbb{C})$ induit, pour tout $r \geqslant 0$, un isomorphisme*

$$L_c^r : H^{n-r}(X, \mathcal{V}) \xrightarrow{\sim} H^{n+r}(X, \mathcal{V}).$$ □

1.5. Le théorème de Corlette. Quand existe-t-il une métrique harmonique sur un fibré holomorphe plat ? Lorsque la variété X est kählérienne et compacte, la réponse est donnée par un théorème de K. Corlette [**5**] et C. Simpson [**20**].

Théorème 1.5.1. *Soit* (V, ∇) *un fibré holomorphe à connexion holomorphe plate sur une variété kählérienne compacte* X*. Il existe une métrique harmonique sur* V *relativement à* ∇ *si et seulement si la représentation associée à* (V, ∇) *est semi-simple, i.e. somme directe de représentations irréductibles.*

1.6. Annexe : représentations complètement réductibles. Rappelons quelques résultats classiques de théorie des représentations linéaires de dimension finie. Soit Π un groupe et ρ une représentation linéaire de Π sur un espace vectoriel V de dimension finie sur un corps k. Nous considérerons essentiellement les corps $k = \mathbb{Q}$ et $k = \mathbb{C}$. Ainsi, ρ est un homomorphisme $\Pi \to \mathrm{GL}(V)$. Nous dirons que V est un Π-module (il serait plus correct d'introduire l'algèbre associative — mais non commutative en général — $\mathbb{C}[\Pi]$ du groupe Π, formée des combinaisons linéaires à coefficients dans $\mathbb{C}$ des éléments de Π, et de parler de $\mathbb{C}[\Pi]$-module à gauche). Les sous-espace de V stables par $\rho(\Pi)$ correspondent donc aux sous-Π-modules de V.

Nous dirons qu'un Π-module V est *irréductible* s'il n'a pas de sous-Π-module non trivial. Alors, tout homomorphisme entre deux Π-modules irréductibles est soit nul, soit un isomorphisme (lemme de Schur). Si le corps k est algébriquement clos, tout automorphisme d'un Π-module irréductible est un multiple (non nul) de l'identité (considérer un espace propre de l'automorphisme).

Proposition. *Pour un* Π*-module* V*, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(1) *Le* Π*-module* V *est semi-simple, i.e. tout sous-*Π*-module admet un sous-*Π*-module supplémentaire.*

(2) *Le* Π*-module* V *est complètement réductible, i.e.* V *admet une décomposition (en général non unique) en somme directe de sous-*Π*-modules irréductibles.*

(3) *Le* Π*-module* V *est engendré par ses sous-*Π*-modules irréductibles.*

Démonstration. Le seul point qui ne soit pas évident est (3) $\Rightarrow$ (1). Soit donc W un sous-Π-module de V. Nous montrons le résultat par récurrence sur $\operatorname{codim} W$, celui-ci étant clair pour $\operatorname{codim} W = 0$. Si $\operatorname{codim} W \geqslant 1$, il existe, par hypothèse, un sous-Π-module irréductible $V_1 \subset V$ non contenu dans W et non trivial. Par irréductibilité de V_1, on a $W \cap V_1 = \{0\}$ et $W_1 = W \oplus V_1$ est un sous-Π-module de V auquel on peut appliquer l'hypothèse de récurrence. Si W_1' est un Π-module supplémentaire de W_1, alors $W' = W_1' \oplus V_1$ est un Π-module supplémentaire de W. □

Il résulte alors du lemme de Schur qu'un Π-module complètement réductible admet une décomposition *unique* en somme directe

$$V = \oplus_i V_i = \oplus_i (V_i^o \otimes E_i),$$

dans laquelle les *composantes isotypiques* V_i sont des sous-Π-modules de la forme $V_i^o \otimes E_i$, où V_i^o est un Π-module irréductible, V_i^o n'est pas isomorphe à V_j^o pour $i \neq j$, et E_i est un Π-module trivial, *i.e.* sur lequel Π agit par l'identité.

On voit aussi que si W est un sous-Π-module d'un Π-module complètement réductible V, il est lui-même complètement réductible et sa décomposition isotypique est donnée par

$$W = \oplus_i (W \cap V_i),$$

dans laquelle $W \cap V_i = V_i^o \otimes F_i$ pour un certain sous-espace F_i de E_i. Un Π-module supplémentaire de W s'obtient alors en choisissant pour chaque i un k-espace vectoriel supplémentaire de F_i dans E_i.

Remarques. Les propriétés ci-dessus ont des conséquences faciles à démontrer.

(1) Un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $V_{\mathbb{Q}}$ est un Π-module semi-simple *si et seulement si* l'espace complexe $V_{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Q}} V_{\mathbb{Q}}$ est un Π-module semi-simple (pour la représentation complexifiée).

Rappelons d'abord que le groupe $\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{C})$ opère sur $V_{\mathbb{C}}$: si $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ est $\mathbb{Q}$-une base de $V_{\mathbb{Q}}$, alors, pour $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ et $\sigma \in \mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{C})$, on pose $\sigma\big(\sum_i a_i \varepsilon_i\big) = \sum_i \sigma(a_i)\varepsilon_i$. Un sous-espace $W_{\mathbb{C}}$ de $V_{\mathbb{C}}$ est « défini sur $\mathbb{Q}$ », *i.e.* de la forme $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Q}} W_{\mathbb{Q}}$ pour un sous-espace $W_{\mathbb{Q}}$ de $V_{\mathbb{Q}}$, si et seulement si il est laissé stable par tout automorphisme $\sigma \in \mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{C})$: en effet, si $d = \dim_{\mathbb{C}} W_{\mathbb{C}}$, on peut, quitte à renuméroter la base $\boldsymbol{\varepsilon}$, trouver une base $e_1, \dots, e_d$ de $W_{\mathbb{C}}$ telle que

$$\begin{aligned}
e_1 &= \varepsilon_1 + a_{1,2}\varepsilon_2 + \cdots + a_{1,d}\varepsilon_d + \cdots + a_{1,n}\varepsilon_n \\
e_2 &= \qquad\qquad\; \varepsilon_2 + \cdots + a_{1,d}\varepsilon_d + \cdots + a_{2,n}\varepsilon_n \\
&\;\vdots \\
e_d &= \qquad\qquad\qquad\qquad\;\; \varepsilon_d + \cdots + a_{d,n}\varepsilon_n,
\end{aligned}$$

où les $a_{i,j}$ sont dans $\mathbb{C}$; on montre alors par récurrence descendante sur $i \in \{d, \dots, 1\}$ que, si $W_{\mathbb{C}}$ est stable par $\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{C})$, les $a_{i,j}$ sont invariants par tout automorphisme de $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{Q}$, *i.e.* sont dans $\mathbb{Q}$ par séparabilité de $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{Q}$.

Revenons à l'assertion. Supposons d'abord $V_{\mathbb{Q}}$ irréductible et considérons le sous-espace $W_{\mathbb{C}}$ de $V_{\mathbb{C}}$ engendré par les sous-Π-modules de dimension minimale (donc irréductibles). Puisque la représentation de Π est définie sur $\mathbb{Q}$, si $E_{\mathbb{C}}$ est un Π-module, il en est de même de $\sigma(E_{\mathbb{C}})$ pour tout $\sigma \in \mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{C})$; ainsi l'espace $W_{\mathbb{C}}$ est invariant par $\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{C})$, autrement dit est de la forme $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Q}} W_{\mathbb{Q}}$ pour un certain sous-espace $W_{\mathbb{Q}}$ de $V_{\mathbb{Q}}$. Il est clair que $W_{\mathbb{Q}}$ est un sous-Π-module de $V_{\mathbb{Q}}$, donc $W_{\mathbb{Q}} = V_{\mathbb{Q}}$. Par le critère (3) de la proposition, $V_{\mathbb{C}}$ est semi-simple.

Réciproquement, supposons $V_{\mathbb{C}}$ semi-simple. Choisissons une forme $\mathbb{Q}$-linéaire $\ell : \mathbb{C} \to \mathbb{Q}$ telle que $\ell(1) = 1$. Elle définit une application $\mathbb{Q}$-linéaire $L : V_{\mathbb{C}} \to V_{\mathbb{Q}}$ qui est Π-invariante et qui induit l'identité sur $V_{\mathbb{Q}}$. Soit $W_{\mathbb{Q}}$ un sous-Π-module de $V_{\mathbb{Q}}$. On a une projection Π-invariante $V_{\mathbb{C}} \to W_{\mathbb{C}}$, d'où une projection composée p qui est

Π-invariante,

$$\begin{tikzcd}
V_{\mathbb{C}} \arrow[r] & W_{\mathbb{C}} \arrow[r, "L"] & W_{\mathbb{Q}} \\
V_{\mathbb{Q}} \arrow[u, hook] \arrow[urr, "p"']
\end{tikzcd}$$

ce qui donne un Π-module supplémentaire de $W_{\mathbb{Q}}$ dans $V_{\mathbb{Q}}$.

(2) Si $\Pi'' \to \Pi$ est un homomorphisme surjectif de groupes et ρ'' est la représentation composée, alors V est un Π-module semi-simple si et seulement si c'est un Π''-module semi-simple. En effet, la structure de Π-module ne dépend que de l'image $\rho(\Pi) \subset \mathrm{GL}(V)$.

(3) Soit $\Pi' \subset \Pi$ un sous-groupe *distingué*, et soit V un Π-module. Alors, si V est semi-simple comme Π-module, il l'est aussi comme Π'-module. En effet, si V' est un sous-Π'-module irréductible de V, alors $\rho(\pi)V'$ l'est encore, pour tout $\pi \in \Pi$. Si V est Π-irréductible et si V' est un sous-Π'-module irréductible non nul, le sous-Π'-module engendré par les $\rho(\pi)V'$ est un Π-module, donc est égal à V. Par conséquent, V est engendré par ses sous-Π'-modules irréductibles, donc est Π'-semi-simple par le critère (3) de la proposition.

2. $\mathscr{R}$-modules

2.1. z-connexions et $\mathscr{R}$-modules

2.1.a. *z-connexions plates.* Il est commode d'introduire une nouvelle variable z pour exprimer de manière concise les relations qui définissent une métrique harmonique (*cf.* définition 1.4.1). Cette variable apparaît déjà implicitement dans les relations (1.4.4).

Je considère la droite projective $\mathbb{P}^1$ munie d'un recouvrement par deux cartes affines Ω_0 et Ω_∞. La coordonnée sur Ω_0 est notée z, et $1/z$ s'étend en une coordonnée sur Ω_∞. Dans ce chapitre, je ne considère que la carte Ω_0, mais les deux cartes interviendront au chapitre suivant lors de l'introduction de la notion de twisteur. Dans ce chapitre, je ne considère que des objets holomorphes. Les objets anti-holomorphes seront vus dans la carte Ω_∞.

Si X est une variété complexe, je note $\mathscr{X} = X \times \Omega_0$. Je considère ici Ω_0 soit comme une variété affine (cadre algébrique), soit comme une variété analytique.

Je note $\Theta_{\mathscr{X}}$ le faisceau ($\mathscr{O}_{\mathscr{X}}$-localement libre) des champs de vecteurs holomorphes relatifs à la projection $\mathscr{X} \to \Omega_0$ qui ont un zéro d'ordre 1 le long de $z = 0$. Dans une carte locale de X, les champs s'écrivent $\sum_i \varphi_i(x,z)\eth_{x_i}$, avec φ_i holomorphe et $\eth_{x_i} \overset{\text{déf}}{=} z\partial/\partial x_i$.

Dualement, $\Omega^1_{\mathscr{X}}$ désigne le faisceau ($\mathscr{O}_{\mathscr{X}}$-localement libre) des 1-formes relatives sur $\mathscr{X}$ à pôle d'ordre 1 le long de $z = 0$. Une base locale est formée des dx_i/z.

Soit $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_{\mathscr{X}}$-module. Une z-connexion est un morphisme $\mathscr{O}_{\Omega_0}$-linéaire $\nabla : \mathscr{F} \to \Omega^1_{\mathscr{X}} \otimes_{\mathscr{O}_{\Omega_0}} \mathscr{F}$ qui satisfait à l'identité de Leibniz $\nabla(\varphi \cdot v) = \varphi \cdot \nabla v + d\varphi \otimes v$.

Une z-connexion est *plate* si son carré $\nabla \circ \nabla : \mathscr{F} \to \Omega^2_{\mathscr{X}} \otimes \mathscr{F}$ est nul (on définit $\Omega^2_{\mathscr{X}}$ comme étant $\Omega^1_{\mathscr{X}} \wedge \Omega^1_{\mathscr{X}}$).

Soit (H, D_V, h_H) un fibré vectoriel C^∞ sur X muni d'une connexion D_V et d'une métrique h_H. Soit $\mathscr{H}$ le fibré C^∞ image inverse sur $\mathscr{X}$.

Proposition 2.1.1. *Le triplet (H, D_V, h_H) est harmonique si et seulement si les deux propriété suivantes sont satisfaites :*

(1) *l'opérateur $\overline{\partial}_z + D''_{\mathscr{H}}$, avec $D''_{\mathscr{H}} \stackrel{\text{déf}}{=} D''_E + z\theta''_E$, est une structure complexe sur $\mathscr{H}$ (i.e. est de carré nul) et son noyau est un $\mathscr{O}_{\mathscr{X}}$-module localement libre $\mathscr{H}'$.*

(2) *la $(1,0)$-connexion relative $D'_{\mathscr{H}} \stackrel{\text{déf}}{=} D'_E + \theta'_E/z$ induit sur $\mathscr{H}'$ une z-connexion holomorphe plate.*

Démonstration. Comme $D''_{\mathscr{H}}$ dépend de manière holomorphe de z et que $\overline{\partial}_z$ est de carré nul, la première propriété équivaut à la nullité de $(D''_{\mathscr{H}})^2$. En développant par rapport à z, celle-ci est équivalente aux égalités $(D''_E)^2 = 0$, $D''_E(\theta''_E) = 0$ et $\theta''_E \wedge \theta''_E = 0$.

La commutation de $D'_{\mathscr{H}}$ à $\overline{\partial}_z + D''_{\mathscr{H}}$ se réduit à la commutation à $D''_{\mathscr{H}}$, qui se réduit, en développant par rapport à z, aux identités $D'_E D''_E + D''_E D'_E = -(\theta'_E \theta''_E + \theta''_E \theta'_E)$, $D'(\theta''_E) = 0$ et $D''(\theta'_E) = 0$.

La platitude $D'_{\mathscr{H}}$ équivaut aux identités $(D'_E)^2 = 0$, $D'_E(\theta'_E) = 0$ et $\theta'_E \wedge \theta'_E = 0$.

On a ainsi utilisé exactement toutes les identités de la définition 1.4.1. □

2.1.b. *$\mathscr{R}_{\mathscr{X}}$-modules.* Soit $\mathscr{D}_X$ le faisceau des opérateurs différentiels holomorphes sur X et $F_\bullet \mathscr{D}_X$ la filtration par l'ordre des opérateurs (degré en les dérivations). L'anneau de Rees est par définition l'anneau $R_F\mathscr{D}_X = \oplus_{k\in\mathbb{N}} F_k\mathscr{D}_X \cdot z^k$, où z est une nouvelle variable. C'est un module sur l'anneau de Rees de $\mathscr{O}_X$ muni de la filtration triviale $F_k\mathscr{O}_X = \mathscr{O}_X$ pour $k \geqslant 0$, c'est-à-dire l'anneau des polynômes en z à coefficients dans $\mathscr{O}_X$.

Définition 2.1.2. On pose $\mathscr{R}_{\mathscr{X}} = \mathscr{O}_{\mathscr{X}} \otimes_{\mathscr{O}_X[z]} R_F\mathscr{D}_X$.

(On notera que z, et plus généralement les sections de $\mathscr{O}_{\Omega_0}$, sont centraux dans $\mathscr{R}_{\mathscr{X}}$.)

On a ainsi « analytisé » par rapport à la variable z l'anneau de Rees. Le faisceau $\mathscr{R}_{\mathscr{X}}$ est localement engendré par $\mathscr{O}_{\mathscr{X}}$ et les champs de vecteurs $\Theta_{\mathscr{X}}$ définis plus haut. De manière tautologique, la donnée d'une z-connexion plate sur un $\mathscr{O}_{\mathscr{X}}$-module équivaut à la donnée d'une structure de $\mathscr{R}_{\mathscr{X}}$-module sur celui-ci (étendant la structure de $\mathscr{O}_{\mathscr{X}}$-module).

La théorie des $\mathscr{R}_{\mathscr{X}}$-modules (cohérence, image directe, image inverse) se développe exactement comme celle des $\mathscr{D}_X$-modules, si on ne considère que des applications $X \to Y$, qui induise des applications $\mathscr{X} \to \mathscr{Y}$.

Définition 2.1.3. Un $\mathscr{R}_{\mathscr{X}}$-module est dit *strict* s'il n'a pas de $\mathscr{O}_{\Omega_0}$-torsion.

Par exemple, le fibré $\mathscr{H}'$ ci-dessus, muni de sa z-connexion $D'_{\mathscr{H}}$, est un $\mathscr{R}_{\mathscr{X}}$-module strict.

La propriété d'être strict est fragile : elle ne se préserve pas par quotient, par image directe, etc.

Remarque 2.1.4 **(restriction à $z = z_o$).** Soit $z_o \in \Omega_0$. Si $z_o \neq 0$, on peut identifier $\mathscr{R}_{\mathscr{X}}/(z-z_o)\mathscr{R}_{\mathscr{X}}$ à $\mathscr{D}_X$, alors que si $z_o = 0$, on identifie ce quotient à $\mathrm{gr}_F\mathscr{D}_X$, c'est-à-dire à l'anneau des fonctions sur T^*X qui sont polynomiales dans les fibres de $T^*X \to X$ (anneau que je note $\mathscr{O}_X[TX]$, quand j'oublie la graduation de $\mathrm{gr}_F\mathscr{D}_X$).

Si $\mathscr{M}$ est un $\mathscr{R}_{\mathscr{X}}$-module, il donne naissance à une famille (non intégrable en général) de $\mathscr{D}_X$-modules paramétrée par $z_o \neq 0$: ce sont les $\mathscr{M}/(z-z_o)\mathscr{M}$. Il donne aussi naissance à un $\mathscr{O}_X[TX]$-module (non gradué en général), à savoir $\mathscr{M}/z\mathscr{M}$: c'est le module de Higgs associé à $\mathscr{M}$ (de manière tautologique, la donnée d'un morphisme $\mathscr{O}_X$-linéaire $\theta : \mathscr{F} \to \Omega^1_X \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{F}$ sur un $\mathscr{O}_X$-module $\mathscr{F}$, satisfaisant à la condition de Higgs $\theta \wedge \theta = 0$, est équivalente à la donnée d'une structure de $\mathscr{O}_X[TX]$-module sur $\mathscr{F}$).

Si $\mathscr{M}$ est $\mathscr{R}_{\mathscr{X}}$-cohérent, les objets restreints sont cohérents sur l'anneau correspondant.

Exemple 2.1.5. Si M est un $\mathscr{D}_X$-module muni d'une bonne filtration $F_\bullet M$, le module de Rees associé $R_FM \overset{\text{déf}}{=} \oplus_k F_kMz^k$ est un $R_F\mathscr{D}_X$-module cohérent, d'où un $\mathscr{R}_{\mathscr{X}}$-module cohérent $\mathscr{M}$ par analytisation. Les restrictions à z_o, pour $z_o \neq 0$, sont toutes isomorphes à M en tant que $\mathscr{D}_X$-modules, et la restriction à $z_o = 0$ est égale à gr_FM (où l'on oublie la graduation), dont le support est la variété caractéristique de M.

Exemple 2.1.6. Soit $\alpha = \alpha' + i\alpha''$ un nombre complexe, avec $\alpha', \alpha'' \in \mathbb{R}$. Pour $z \in \mathbb{C}$ je pose

$$\alpha \star z = \alpha' z + i\alpha''(z^2+1)/2. \tag{2.1.7}$$

Soit N un endomorphisme nilpotent d'un espace vectoriel V^o. Soit X la droite complexe de coordonnée t et $\mathscr{V}$ le fibré holomorphe $\mathscr{O}_{\mathscr{X}} \otimes_{\mathbb{C}} V^o$. Si d désigne la connexion (relative) usuelle sur $\mathscr{O}_{\mathscr{X}}$ (qui est en particulier une z-connexion), alors la connexion

$$\nabla = d + [(\alpha \star z)\,\mathrm{Id} + \mathrm{N}]\frac{dt}{zt}$$

induit une structure de $\mathscr{R}_{\mathscr{X}}$-module sur le fibré méromorphe $\mathscr{V}(1/t)$. On peut montrer que le $\mathscr{R}_{\mathscr{X}}$-sous-module $\mathscr{M}$ engendré par $\mathscr{V}$ est $\mathscr{R}_{\mathscr{X}}$-cohérent.

Dans cet exemple, la famille des $\mathscr{M}/(z-z_o)$ n'est pas intégrable si $\alpha'' \neq 0$, car alors la valeur propre de la monodromie des solutions dépend de z_o.

Le module de Higgs $\mathscr{M}/z\mathscr{M}$, sur l'espace T^*X de coordonnées (t,τ), est à support dans l'ensemble $t\tau = i\alpha''/2$. Il n'y a donc pas d'homogénéité en τ.

Définition 2.1.8 **(intégrabilité).** Un $\mathscr{R}_{\mathscr{X}}$-module est dit *intégrable* si la z-connexion provient d'une connexion (absolue) de rang de Poincaré 1.

Autrement dit, on demande qu'il existe une action de l'opérateur $z^2\partial_z$ compatible à l'action de $\mathscr{R}_{\mathscr{X}}$.

L'exemple 2.1.5 est intégrable (on fait agir $z^2\partial_z$ de la seule manière raisonnable sur $R_F M$). Par contre, l'exemple 2.1.6 ne l'est pas si $\alpha'' \neq 0$ (car la valeur propre de la monodromie doit rester constante dans le cas intégrable).

2.2. V-filtrations

2.2.a. *Définitions.* Soit X' une variété complexe et X un ouvert dans $\mathbb{C} \times X'$. Je note t la coordonnée sur le facteur $\mathbb{C}$, que je considère aussi comme une fonction sur X, et $\eth_t$ le champ de vecteurs correspondant. Je pose $X_0 = t^{-1}(0) \subset X$ (ouvert dans X') et je note $\mathscr{I}_{X_0}$ (resp. $\mathscr{I}_{\mathscr{X}_0}$) son idéal dans $\mathscr{O}_X$ (resp. in $\mathscr{O}_{\mathscr{X}}$).

Je note $V_\bullet\mathscr{R}_{\mathscr{X}}$ la filtration croissante indexée par $\mathbb{Z}$ associée à X_0 : pour tout $(x, z) \in \mathscr{X}$,

$$V_k\mathscr{R}_{\mathscr{X},(x,z)} = \{P \in \mathscr{R}_{\mathscr{X},(x,z)} \mid P \cdot \mathscr{I}^{j}_{\mathscr{X}_0,(x,z)} \subset \mathscr{I}^{j-k}_{\mathscr{X}_0,(x,z)}\ \forall j \in \mathbb{Z}\}$$

où par convention $\mathscr{I}^\ell = \mathscr{O}_{\mathscr{X}}$ si $\ell \leqslant 0$. Dans tout système de coordonnées locales $(x_2, \dots, x_n) = x'$ de X', le germe $P \in \mathscr{R}_{\mathscr{X}}$ est dans $V_k\mathscr{R}_{\mathscr{X}}$ si et seulement si

– $P = \sum_{\boldsymbol{j}=(j_1,\boldsymbol{j}')} a_{\boldsymbol{j}}(t, x', z)(t\eth_t)^{j_1}\eth_{x'}^{\boldsymbol{j}'}$, si $k = 0$:

– $P = t^{|k|}Q$ avec $Q \in V_0\mathscr{R}_{\mathscr{X}}$, si $k \in -\mathbb{N}$ (*i.e.* $V_k\mathscr{R}_{\mathscr{X}} = t^{|k|}V_0\mathscr{R}_{\mathscr{X}} = V_0\mathscr{R}_{\mathscr{X}} \cdot t^{|k|}$) ;

– $P = \sum_{0\leqslant j\leqslant k} Q_j\eth_t^j$ avec $Q_j \in V_0\mathscr{R}_{\mathscr{X}}$, si $k \in \mathbb{N}$ (*i.e.* $V_k\mathscr{R}_{\mathscr{X}} = \sum_{j=0}^k \eth_t^j V_0\mathscr{R}_{\mathscr{X}} = \sum_{j=0}^k V_0\mathscr{R}_{\mathscr{X}} \cdot \eth_t^j$).

Posons $V_k\mathscr{O}_{\mathscr{X}} = V_k\mathscr{R}_{\mathscr{X}} \cap \mathscr{O}_{\mathscr{X}}$. Ce n'est rien d'autre que la filtration $\mathscr{I}_{\mathscr{X}_0}$-adique sur $\mathscr{O}_{\mathscr{X}}$. On a les propriétés suivantes :

– $V_k\mathscr{R}_{\mathscr{X}} \cdot V_\ell\mathscr{R}_{\mathscr{X}} \subset V_{k+\ell}\mathscr{R}_{\mathscr{X}}$ avec égalité pour $k, \ell \leqslant 0$ ou $k, \ell \geqslant 0$.

– $V_k\mathscr{R}_{\mathscr{X}\smallsetminus\mathscr{X}_0} = \mathscr{R}_{\mathscr{X}\smallsetminus\mathscr{X}_0}$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

– $\Big(\cap_k V_k\mathscr{R}_{\mathscr{X}}\Big)_{|\mathscr{X}_0} = \{0\}$.

Définition 2.2.1. Soit $\mathscr{M}$ un $\mathscr{R}_{\mathscr{X}}$-module à gauche. Une V*-filtration* de $\mathscr{M}$ est une filtration $U_\bullet\mathscr{M}$ croissante exhaustive indexée par $\mathbb{Z}$ telle que, pour tout $k, \ell \in \mathbb{Z}$, on ait $V_k\mathscr{R}_{\mathscr{X}} \cdot U_\ell\mathscr{M} \subset U_{k+\ell}\mathscr{M}$.

Remarques 2.2.2

(1) On identifie le faisceau $\mathrm{gr}_0^V\mathscr{R}_{\mathscr{X}} \overset{\text{déf}}{=} V_0\mathscr{R}_{\mathscr{X}}/V_{-1}\mathscr{R}_{\mathscr{X}}$, qui est à support sur $\mathscr{X}_0$, avec le faisceau $\mathscr{R}_{\mathscr{X}_0}[t\eth_t]$, et je note encore $t\eth_t$ la classe de $t\eth_t$ dans $\mathrm{gr}_0^V\mathscr{R}_{\mathscr{X}}$. En particulier, $\mathscr{R}_{\mathscr{X}_0}$ est un sous-anneau de $\mathrm{gr}_0^V\mathscr{R}_{\mathscr{X}}$. La classe de $t\eth_t$ commute à toute section de $\mathscr{R}_{\mathscr{X}_0}$.

(2) Étant donnée une fonction holomorphe $f : X' \to \mathbb{C}$ sur une variété complexe X' et un $\mathscr{R}_{\mathscr{X}'}$-module $\mathscr{M}$, on note $i_f : X' \hookrightarrow X = \mathbb{C} \times X'$ l'inclusion du graphe de f, t la coordonnée sur $\mathbb{C}$, et on considère alors la V-filtrations sur le $\mathscr{R}_{\mathscr{X}}$-module $i_{f,+}\mathscr{M}$.

(3) La notion de *bonne* V-filtration se définit comme dans le cas des $\mathscr{D}$-modules, les propriétés sont identiques. Notamment, on a les propriétés suivantes pour une bonne filtration sur un $\mathscr{R}_{\mathscr{X}}$-module cohérent $\mathscr{M}$:

– localement sur $\mathscr{X}$, il existe k_0 tel que, pour tout $k \leqslant k_0$, $t : U_{-k}\mathscr{M} \to U_{-k-1}\mathscr{M}$ soit bijectif ;

– soit $\mathscr{U}$ un $V_0\mathscr{R}_{\mathscr{X}}$-module cohérent et soit $\mathscr{T}$ sa t-torsion, *i.e.* le sous-faisceau des sections locales annulées par une puissance de t ; alors, localement sur $\mathscr{X}$, il existe ℓ tel que $\mathscr{T} \cap t^\ell\mathscr{U} = 0$;

– si $\mathscr{N}$ est un $\mathscr{R}_{\mathscr{X}}$-sous-module cohérent de $\mathscr{M}$ et $U_\bullet\mathscr{M}$ est une bonne filtration de $\mathscr{M}$, alors la V-filtration induite $U_\bullet\mathscr{N} \overset{\text{déf}}{=} \mathscr{N} \cap U_\bullet\mathscr{M}$ est aussi bonne.

2.2.b. *Régularité.* Je reste dans la situation du § 2.2.a. On peut identifier le faisceau $\mathscr{R}_{\mathscr{X}/\mathbb{C}}$ des opérateurs différentiels relatifs à la fonction t (construit à partir du faisceau $\mathscr{D}_{X/\mathbb{C}}$ par la procédure de Rees) au sous-faisceau de $V_0\mathscr{R}_{\mathscr{X}}$ formé des opérateurs commutant à t.

On dit que le $\mathscr{R}_{\mathscr{X}}$-module V-filtré $(\mathscr{M}, U_\bullet\mathscr{M})$ est *régulier le long de* $\mathscr{X}_0$ si, pour tous $k \in \mathbb{Z}$, $U_k\mathscr{M}$ est $\mathscr{R}_{\mathscr{X}/\mathbb{C}}$-cohérent près de $\mathscr{X}_0$. Si une telle condition est satisfaite pour une bonne filtration $U_\bullet\mathscr{M}$, elle est satisfaite pour toute. Dans une suite exacte, les termes extrêmes sont réguliers le long de $\mathscr{X}_0$ si et seulement si celui du milieu l'est.

2.2.c. *V-filtration et images directes.* On établit la compatibilité entre image directe et graduation pour un $\mathscr{R}_{\mathscr{X}}$-module V-filtré.

Définition 2.2.3. Soit $\mathscr{M}$ un $\mathscr{R}_{\mathscr{X}}$-module à gauche muni d'une filtration exhaustive croissante $U_\bullet\mathscr{M}$ indexée par $\mathbb{Z}$, telle que $V_k\mathscr{R}_{\mathscr{X}} \cdot U_\ell\mathscr{M} \subset U_{k+\ell}\mathscr{M}$ pour tout $k, \ell \in \mathbb{Z}$. On dit que $(\mathscr{M}, U_\bullet\mathscr{M})$ est *monodromique* si, localement sur $\mathscr{X}$, il existe un polynôme unitaire $b(s) \in \mathbb{C}[z][s]$ tel que

(1) $b(-(\eth_t t + kz)) \cdot \mathrm{gr}_k^U\mathscr{M} = 0$ pour tous $k \in \mathbb{Z}$,

(2) pour tous $k \neq \ell$, le pgcd de $b(s - kz)$ et $b(s - \ell z)$), pris dans $\mathbb{C}(z)[s]$, vaut 1 (donc il existe $a_k, a_\ell \in \mathbb{C}[z, s]$ tels que $a_k b(s - kz) + a_\ell b(s - \ell z)) \in \mathbb{C}[z] \smallsetminus \{0\}$).

On utilise une notion analogue pour les modules à droite.

Théorème 2.2.4. *Soit $f : X \to Y$ une application holomorphe entre des variétés analytiques complexes et soit $t \in \mathbb{C}$ un nouvelle variable. Posons $F = f \times \mathrm{Id} : X \times \mathbb{C} \to Y \times \mathbb{C}$. Soit $\mathscr{M}$ un $\mathscr{R}_{\mathscr{X}\times\mathbb{C}}$-module à droite muni d'une V-filtration $U_\bullet\mathscr{M}$ (relative à la fonction $t : X \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$). Alors $U_\bullet\mathscr{M}$ définit de manière canonique et fonctorielle une V-filtration $U_\bullet\mathscr{H}^i(F_\dagger\mathscr{M})$.*

Supposons que F soit propre sur le support de $\mathscr{M}$.

(1) *Si $\mathscr{M}$ est bon*[2] *et si $U_\bullet\mathscr{M}$ est une bonne V-filtration, alors $U_\bullet\mathscr{H}^i(F_\dagger\mathscr{M})$ est une bonne V-filtration.*

(2) *Si de plus $(\mathscr{M}, U_\bullet\mathscr{M})$ est monodromique et $f_\dagger \mathrm{gr}^U\mathscr{M}$ est strict, alors on a un isomorphisme canonique et fonctoriel de $\mathscr{R}_{\mathscr{Y}}$-modules ($k \in \mathbb{Z}$)*

$$\mathrm{gr}_k^U\big(\mathscr{H}^i F_\dagger\mathscr{M}\big) = \mathscr{H}^i\big(f_\dagger \mathrm{gr}_k^U\mathscr{M}\big);$$

de plus, $\mathrm{gr}^U\big(\mathscr{H}^i F_\dagger\mathscr{M}\big)$ est monodromique et strict.

Remarque 2.2.5. Lorsque $\mathscr{M}$ est l'analytisé du module de Rees $R_F M$ d'une bonne filtration d'un $\mathscr{D}_X$-module M, cet énoncé exprime la compatibilité des graduations par F et par U après image directe. Cet énoncé est dû à M. Saito, qui travaille avec la filtration V de Malgrange-Kashiwara. L'hypothèse porte alors sur les modules de cycles proches $\psi_\lambda M$ et de cycles évanescents $\phi_1 M$, qui suffisent à retrouver tous les $\mathrm{gr}_k^V M$, et sur la filtration induite par $F_\bullet M$ sur ces modules. Le fait que $f_\dagger R_F\psi_\lambda M$ soit strict signifie que la suite spectrale de Leray pour la filtration $F_\bullet f_\dagger\psi_\lambda M$ dégénère en E_1 (et de même pour ϕ_1).

M. Saito montre que cette dégénérescence a bien lieu pour les modules de Hodge (mixtes) tels qu'il les définit, et ceci lui permet d'obtenir, *via* le théorème 2.2.4, la compatibilité de la filtration de Hodge et de la filtration de Malgrange-Kashiwara pour les images directes.

Par exemple, étant donnés le $\mathscr{D}_X$-module $\mathscr{O}_X$ filtré de manière triviale ($F_0\mathscr{O}_X = \mathscr{O}_X$ et $F_{-1}\mathscr{O}_X = 0$), un morphisme propre $f : X \to Y$ et une fonction holomorphe $h : Y \to \mathbb{C}$, on considère l'image directe $M = i_{h+}\mathscr{O}_X = \oplus_\ell \mathscr{O}_X\partial_t^k\delta(t-h)$ sur $X\times\mathbb{C}$, filtrée par le degré en ∂_t. On peut appliquer le théorème à $f_\dagger(M, F_\bullet M)$, qui est sous-jacent à un module de Hodge polarisé.

La première partie du théorème est standard : on réalise l'image directe $F_\dagger$ par un complexe de de Rham relatif. Il est facile de réaliser ce complexe de manière V-filtrée. On applique alors des variantes du théorème de cohérence des images directes de Grauert. Je vais insister sur la seconde. Elle repose sur la

Proposition 2.2.6. *Soit $(\mathscr{N}^\bullet, U_\bullet\mathscr{N}^\bullet)$ un complexe V-filtré de $\mathscr{R}_{\mathscr{Y}\times\mathbb{C}}$-modules. Supposons que*

(1) *le complexe $\mathrm{gr}^U\mathscr{N}^\bullet$ est strict et monodromique,*

(2) *il existe j_0 tel que, pour tous $j \leqslant j_0$ et tous i, la multiplication à gauche par t induise un isomorphisme $t : U_j\mathscr{N}^i \xrightarrow{\sim} U_{j-1}\mathscr{N}^i$,*

(3) *il existe $i_0 \in \mathbb{Z}$ tel que, pour tous $i \geqslant i_0$ et tout j, on ait $\mathscr{H}^i(U_j\mathscr{N}^\bullet) = 0$.*

---

[2] c'est-à-dire qui admet, sur tout compact de $\mathscr{X}$, une filtration finie par des $\mathscr{R}_{\mathscr{X}}$-modules pour laquelle les quotients successifs ont une bonne filtration F sur le compact ; ceci assure la cohérence des images directes.

Alors, pour tous i,j, le morphisme $\mathscr{H}^i(U_j\mathscr{N}^\bullet)\to\mathscr{H}^i(\mathscr{N}^\bullet)$ est injectif. De plus, la filtration $U_\bullet\mathscr{H}^i(\mathscr{N}^\bullet)$ définie par

$$U_j\mathscr{H}^i(\mathscr{N}^\bullet)=\mathrm{image}\Big[\mathscr{H}^i(U_j\mathscr{N}^\bullet)\longrightarrow\mathscr{H}^i(\mathscr{N}^\bullet)\Big]$$

satisfait $\mathrm{gr}^U\mathscr{H}^i(\mathscr{N}^\bullet)=\mathscr{H}^i(\mathrm{gr}^U\mathscr{N}^\bullet)$.

On applique la proposition à $\mathscr{N}^\bullet=f_\dagger\mathscr{M}$ muni de $U_\bullet\mathscr{N}^\bullet=f_\dagger U_\bullet\mathscr{M}$ pour obtenir 2.2.4(2). Que l'hypothèse (1) dans la proposition soit satisfaite résulte des hypothèses dans 2.2.4(2). L'hypothèse (2) est satisfaite comme conséquence du fait que $U_\bullet\mathscr{M}$ est une bonne V-filtration et de la remarque 2.2.2(3). Enfin, l'hypothèse (3) est satisfaite car f est de dimension cohomologique finie.

Démonstration. Elle se fait en trois étapes.

Première étape. Cette étape montre un analogue formel de la conclusion de la proposition. Posons

$$\widehat{U_j\mathscr{N}^\bullet}=\varprojlim_\ell U_j\mathscr{N}^\bullet/U_\ell\mathscr{N}^\bullet\quad\text{et}\quad\widehat{\mathscr{N}^\bullet}=\varinjlim_j\widehat{U_j\mathscr{N}^\bullet}.$$

Sous les hypothèses de la proposition 2.2.6, je vais montrer les propriétés suivantes :

(a) Pour tous $k\leqslant j$, $\widehat{U_k\mathscr{N}^\bullet}\to\widehat{U_j\mathscr{N}^\bullet}$ est injectif (donc, pour tous j, $\widehat{U_j\mathscr{N}^\bullet}\to\widehat{\mathscr{N}^\bullet}$ est injectif) et $\widehat{U_j\mathscr{N}^\bullet}/\widehat{U_{j-1}\mathscr{N}^\bullet}=U_j\mathscr{N}^\bullet/U_{j-1}\mathscr{N}^\bullet$.

(b) pour tout $k\leqslant j$, $\mathscr{H}^i(U_j\mathscr{N}^\bullet/U_k\mathscr{N}^\bullet)$ est strict.

(c) $\mathscr{H}^i(\widehat{U_j\mathscr{N}^\bullet})=\varprojlim_\ell\mathscr{H}^i(U_j\mathscr{N}^\bullet/U_\ell\mathscr{N}^\bullet)$.

(d) $\mathscr{H}^i(\widehat{U_j\mathscr{N}^\bullet})\to\mathscr{H}^i(\widehat{\mathscr{N}^\bullet})$ est injectif.

(e) $\mathscr{H}^i(\widehat{\mathscr{N}^\bullet})=\varinjlim_j\mathscr{H}^i(\widehat{U_j\mathscr{N}^\bullet})$.

Posons $U_j\mathscr{H}^i(\widehat{\mathscr{N}^\bullet})=\mathrm{image}\Big[\mathscr{H}^i(\widehat{U_j\mathscr{N}^\bullet})\to\mathscr{H}^i(\widehat{\mathscr{N}^\bullet})\Big]$. Alors les propriétés (a) et (d) impliquent que

$$\mathrm{gr}_j^U\mathscr{H}^i(\widehat{\mathscr{N}^\bullet})=\mathscr{H}^i(\widehat{U_j\mathscr{N}^\bullet}/\widehat{U_{j-1}\mathscr{N}^\bullet})=\mathscr{H}^i(\mathrm{gr}_j^U\mathscr{N}^\bullet).$$

Pour $\ell<k<j$ considérons la suite exacte de complexes

$$0\longrightarrow U_k\mathscr{N}^\bullet/U_\ell\mathscr{N}^\bullet\longrightarrow U_j\mathscr{N}^\bullet/U_\ell\mathscr{N}^\bullet\longrightarrow U_j\mathscr{N}^\bullet/U_k\mathscr{N}^\bullet\longrightarrow 0.$$

Puisque le système projectif $(U_j\mathscr{N}^\bullet/U_\ell\mathscr{N}^\bullet)_\ell$ satisfait trivialement la condition de Mittag-Leffler (ML), la suite reste exacte à la limite projective, d'où une suite exacte de complexes

$$0\longrightarrow\widehat{U_k\mathscr{N}^\bullet}\longrightarrow\widehat{U_j\mathscr{N}^\bullet}\longrightarrow U_j\mathscr{N}^\bullet/U_k\mathscr{N}^\bullet\longrightarrow 0,$$

donc (a).

Montrons par récurrence sur $n\geqslant 1$ que, pour tous i et j,

$(\mathrm{b})_n$ $\mathscr{H}^i(U_j\mathscr{N}^\bullet/U_{j-n}\mathscr{N}^\bullet)$ est strict (donc (b)) ;

En effet, (b)$_1$ résulte de l'hypothèse 2.2.6(1). On remarque aussi que, par récurrence sur $n \geqslant 1$, 2.2.6(1) implique que, pour tout n, ℓ, i, $\mathscr{H}^i(U_\ell/U_{\ell-n})$ est annulé par $\prod_{k=\ell-n+1}^{\ell} b(\eth_t t + kz)$.

Pour $n \geqslant 2$, considérons la suite exacte

$$\cdots \longrightarrow \mathscr{H}^i(U_{j-1}/U_{j-n}) \longrightarrow \mathscr{H}^i(U_j/U_{j-n}) \longrightarrow \mathscr{H}^i(U_j/U_{j-1}) \xrightarrow{\psi} \mathscr{H}^{i+1}(U_{j-1}/U_{j-n}) \longrightarrow \cdots$$

Toute section locale de $\operatorname{Im}\psi$ est alors annulée par $b(\eth_t t+jz)$ et par $\prod_{k=j-n+1}^{j-1} b(\eth_t t+kz)$, donc par une fonction non nulle de z. Par (b)$_{n-1}$ appliquée à $\mathscr{H}^{i+1}(U_{j-1}/U_{j-n})$, ceci implique que $\psi = 0$, donc la suite exacte précédente des $\mathscr{H}^i$ est exacte et $\mathscr{H}^i(U_j/U_{j-n})$ est aussi strict, d'où (b)$_n$.

Par le même argument, on obtient une suite exacte, pour tous $\ell < k < j$,

$$0 \to \mathscr{H}^i(U_k\mathscr{N}^\bullet/U_\ell\mathscr{N}^\bullet) \to \mathscr{H}^i(U_j\mathscr{N}^\bullet/U_\ell\mathscr{N}^\bullet) \to \mathscr{H}^i(U_j\mathscr{N}^\bullet/U_k\mathscr{N}^\bullet) \to 0. \tag{2.2.7}$$

Par suite, le système projectif $(\mathscr{H}^i(U_j\mathscr{N}^\bullet/U_\ell\mathscr{N}^\bullet))_\ell$ satisfait (ML), et on obtient (c) (voir par exemple [**11**, Prop. 1.12.4]). De plus, en prenant la limite sur ℓ dans la suite exacte précédente, on obtient, d'après (ML), une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathscr{H}^i(\widehat{U_k\mathscr{N}^\bullet}) \longrightarrow \mathscr{H}^i(\widehat{U_j\mathscr{N}^\bullet}) \longrightarrow \mathscr{H}^i(U_j\mathscr{N}^\bullet/U_k\mathscr{N}^\bullet) \longrightarrow 0,$$

d'où (d). Maintenant, (e) est clair.

Deuxième étape. Pour tous i, j, notons $\mathscr{T}_j^i \subset \mathscr{H}^i(U_j\mathscr{N}^\bullet)$ le sous-faisceau de t-torsion de $\mathscr{H}^i(U_j\mathscr{N}^\bullet)$. Je dis qu'il suffit de montrer qu'il existe j_0 tel que, pour tout i et tout $j \leqslant j_0$, on ait

$$\mathscr{T}_j^i = 0. \tag{2.2.8}$$

Supposons en effet que (2.2.8) soit montrée (étape 3). Soit $j \leqslant j_0$ et soit $\ell \geqslant j$. Alors, par définition d'une V-filtration, $t^{\ell-j}$ agit par 0 sur $U_\ell\mathscr{N}^\bullet/U_j\mathscr{N}^\bullet$, donc l'image de $\mathscr{H}^{i-1}(U_\ell\mathscr{N}^\bullet/U_j\mathscr{N}^\bullet)$ dans $\mathscr{H}^i(U_j\mathscr{N}^\bullet)$ est contenue dans $\mathscr{T}_j^i$, donc est nulle. Nous avons donc une suite exacte pour tout i :

$$0 \longrightarrow \mathscr{H}^i(U_j\mathscr{N}^\bullet) \longrightarrow \mathscr{H}^i(U_\ell\mathscr{N}^\bullet) \longrightarrow \mathscr{H}^i(U_\ell\mathscr{N}^\bullet/U_j\mathscr{N}^\bullet) \longrightarrow 0.$$

En utilisant (2.2.7), on obtient pour tout ℓ la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathscr{H}^i(U_{\ell-1}\mathscr{N}^\bullet) \longrightarrow \mathscr{H}^i(U_\ell\mathscr{N}^\bullet) \longrightarrow \mathscr{H}^i(\mathrm{gr}_\ell^U\mathscr{N}^\bullet) \longrightarrow 0.$$

Ceci implique que $\mathscr{H}^i(U_\ell\mathscr{N}^\bullet) \to \mathscr{H}^i(\mathscr{N}^\bullet)$ est injectif. Posons

$$U_\ell\mathscr{H}^i(\mathscr{N}^\bullet) = \mathrm{image}\Big[\mathscr{H}^i(U_\ell\mathscr{N}^\bullet) \longrightarrow \mathscr{H}^i(\mathscr{N}^\bullet)\Big].$$

On a donc, pour tout $i, \ell \in \mathbb{Z}$,

$$\mathrm{gr}_\ell^U\mathscr{H}^i(\mathscr{N}^\bullet) = \mathscr{H}^i(\mathrm{gr}_\ell^U\mathscr{N}^\bullet).$$

Troisième étape : démonstration de (2.2.8). On remarque d'abord que, d'après 2.2.6(2), la multiplication par t induit un isomorphisme $t:\widehat{U_j\mathscr{N}^\bullet}\to\widehat{U_{j-1}\mathscr{N}^\bullet}$ pour $j\leqslant j_0$, et que (d) à l'étape 1 implique que, pour tous i et tous $j\leqslant j_0$, la multiplication par t sur $\mathscr{H}^i(\widehat{U_j\mathscr{N}^\bullet})$ est injective.

La démonstration de (2.2.8) se fait par récurrence descendante sur i. L'assertion est clairement vraie pour $i\geqslant i_0$ (donné par 2.2.6(3)). Supposons que, pour tout $j\leqslant j_0$, on ait $\mathscr{T}_j^{i+1}=0$. On a (d'après 2.2.6(2)) une suite exacte de complexes, pour tout $\ell\geqslant 0$,

$$0\longrightarrow U_j\mathscr{N}^\bullet\xrightarrow{\ t^\ell\ }U_j\mathscr{N}^\bullet\longrightarrow U_j\mathscr{N}^\bullet/U_{j-\ell}\mathscr{N}^\bullet\longrightarrow 0.$$

Puisque $\mathscr{T}_j^{i+1}=0$, on a, pour tout $\ell\geqslant 0$ une suite exacte

$$\mathscr{H}^i(U_j\mathscr{N}^\bullet)\xrightarrow{\ t^\ell\ }\mathscr{H}^i(U_j\mathscr{N}^\bullet)\longrightarrow\mathscr{H}^i(U_j\mathscr{N}^\bullet/U_{j-\ell}\mathscr{N}^\bullet)\longrightarrow 0,$$

donc, d'après l'étape 1,

$$\mathscr{H}^i(\widehat{U_j\mathscr{N}^\bullet})/\mathscr{H}^i(\widehat{U_{j-\ell}\mathscr{N}^\bullet})=\mathscr{H}^i(U_j\mathscr{N}^\bullet/U_{j-\ell}\mathscr{N}^\bullet)=\mathscr{H}^i(U_j\mathscr{N}^\bullet)/t^\ell\mathscr{H}^i(U_j\mathscr{N}^\bullet).$$

D'après le deuxième point de 2.2.2(3), pour ℓ assez grand (localement sur $\mathscr{X}$), l'application $\mathscr{T}_j^i\to\mathscr{H}^i(U_j\mathscr{N}^\bullet)/t^\ell\mathscr{H}^i(U_j\mathscr{N}^\bullet)$ est injective. Il en résulte que $\mathscr{T}_j^i\to\mathscr{H}^i(\widehat{U_j\mathscr{N}^\bullet})$ est aussi injective. Mais on sait que t est injective sur $\mathscr{H}^i(\widehat{U_j\mathscr{N}^\bullet})$ pour $j\leqslant j_0$, donc $\mathscr{T}_j^i=0$, ce qui achève l'étape 3. □

2.3. Spécialisation des $\mathscr{R}_{\mathscr{X}}$-modules. On peut développer la notion de « filtration de Malgrange-Kashiwara » pour un $\mathscr{R}_{\mathscr{X}}$-module le long d'une hypersurface lisse $X_0\subset X$ et définir la notion de $\mathscr{R}_{\mathscr{X}}$-module spécialisable. Je souligne quelques points particuliers avant de commencer la présentation :

– si les racines du polynôme de Bernstein ne sont pas réelles, la V-filtration canonique n'est définie que *localement* par rapport à z ;

– il peut apparaître un ensemble dénombrable de valeurs de z, appelé *ensemble singulier* associé au module spécialisable, valeurs où la restriction à $z=z_o$ de la V-filtration ne donne pas une V-filtration convenable de $\mathscr{D}$-module (différences entières entre certaines valeurs propres du résidu) ; la valeur $z_o=0$ est toujours singulière, pour la bonne raison que la notion de V-filtration de Malgrange-Kashiwara n'existe pas pour les $\mathscr{O}_X[TX]$-modules ;

– pour passer à travers les valeurs singulières de z, il est naturel d'imposer une condition sur les gradués de la V-filtration, à savoir le fait qu'ils soient *stricts* ; avec cette condition, la théorie de la V-filtration s'étend sans difficulté ; on considérera donc surtout des $\mathscr{R}_{\mathscr{X}}$-modules *strictement spécialisables.*

Je garde les notations du § 2.2.a. Je rappelle que $\alpha\star z=\alpha'z+i\alpha''(z^2+1)/2$.

Définition 2.3.1. On dit qu'un $\mathscr{R}_{\mathscr{X}}$-module cohérent $\mathscr{M}$ est *spécialisable* le long de $\mathscr{X}_0$ s'il existe, localement sur X, un ensemble fini $A \subset \mathbb{C}$ et, pour toute section locale m de $\mathscr{M}$, un polynôme $b_m(s) = \prod_{\alpha \in A} \prod_{\ell \in \mathbb{Z}} (s - (\alpha + \ell) \star z)^{\nu_{\alpha,\ell}}$ satisfaisant à

$$
\begin{aligned}
b_m(-\eth_t t) \cdot m &\in V_{-1}\mathscr{R}_{\mathscr{X}} \cdot m \text{ (pour les modules à gauche),} \\
m \cdot b_m(t\eth_t) &\in m \cdot V_{-1}\mathscr{R}_{\mathscr{X}} \text{ (pour les modules à droite).}
\end{aligned}
$$

Une définition équivalente est qu'il existe, localement sur $\mathscr{X}$, une bonne V-filtration $U_\bullet \mathscr{M}$ et un polynôme $b_U(s)$ du même type que ci-dessus, tels que, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on ait

$$
(2.3.1\,*) \qquad b_U(-(\eth_t t + kz)) \cdot \mathrm{gr}_k^U \mathscr{M} = 0, \qquad \text{resp.} \quad \mathrm{gr}_k^U \mathscr{M} \cdot b_U(t\eth_t - kz) = 0.
$$

Je pose $\Lambda = A + \mathbb{Z}$ et je note $\operatorname{Sing}\Lambda \subset \Omega_0$ l'ensemble des z_o tels qu'il existe $\alpha_1, \alpha_2 \in \Lambda \cup \mathbb{Z}$ tels que $(\alpha_1 - \alpha_2) \star z_o = 0$. L'ensemble $\operatorname{Sing}\Lambda \smallsetminus \{0\}$ est contenu dans $i\mathbb{R}^*$, y est discret, et n'admet que 0 comme point d'adhérence dans $i\mathbb{R}$. Cet ensemble se réduit à 0 si $\Lambda \subset \mathbb{R}$.

Pour $z_o \in \Omega_0$, je pose

$$
\ell_{z_o}(\alpha) = \operatorname{Re}(\alpha' + iz_o\alpha'') \quad \text{et} \quad \Lambda(z_o) = \{\alpha \in \Lambda \mid \ell_{z_o}(\alpha) \in [0,1[\}.
$$

Alors la spécialisabilité de $\mathscr{M}$ équivaut à l'existence, au voisinage de z_o, d'une bonne filtration V-filtration $U_\bullet^{(z_o)}\mathscr{M}$ admettant un polynôme de Bernstein comme dans (2.3.1 $*$), où les racines de $b_{U^{(z_o)}}$ sont dans $\Lambda(z_o)$. On peut alors indexer la filtration par l'ensemble $\ell_{z_o}(\Lambda) = \ell_{z_o}(\Lambda(z_o)) + \mathbb{Z}$.

Proposition-définition 2.3.2. *Supposons que $\mathscr{M}$ soit un $\mathscr{R}_{\mathscr{X}}$-module spécialisable le long de X_0 (au sens de la définition* 2.3.1*) et qu'il admette, pour chaque $z_o \in \Omega_0$, une bonne V-filtration $U_\bullet^{(z_o)}\mathscr{M}$ telle que chaque gradué $\mathrm{gr}_a^{U^{(z_o)}}\mathscr{M}$ soit un $\mathscr{R}_{\mathscr{X}_0}$-module* strict.

Alors cette filtration est unique et on la note $V_\bullet^{(z_o)}\mathscr{M}$. De plus, si on décompose le gradué

$$
\mathrm{gr}_a^{V^{(z_o)}}\mathscr{M} = \bigoplus_{\ell_{z_o}(\alpha)=a} \psi_{t,\alpha}^{(z_o)}\mathscr{M}
$$

suivant les valeurs propres de $-\eth_t t$, alors les $\psi_{t,\alpha}^{(z_o)}\mathscr{M}$ se recollent pour définir un $\mathscr{R}_{\mathscr{X}_0}$-module strict $\psi_{t,\alpha}\mathscr{M}$.

3. Formes hermitiennes

3.1. Introduction : entre positivité et horizontalité, il faut choisir. Reprenons l'exemple 1.4.2 des variations de structure de Hodge polarisée sur une variété complexe X. On dispose sur le fibré H d'une forme sesquilinéaire k, qui est D_V-plate. Notons $V = \ker D_V''$, muni de la connexion holomorphe plate ∇ induite par D_V', et $\overline{V}$ le fibré anti-holomorphe associé, muni de la connexion anti-holomorphe $\overline{\nabla}$. Alors k

définit une forme sesquilinéaire $k : V \otimes_{\mathbb{C}} \overline{V} \to \mathscr{C}_X^\infty$ (en fait k prend ses valeurs dans le faisceau des fonctions analytiques réelles).

Comment étendre cette notion aux objets singuliers ?

La notion de fibré à connexion plate (V, ∇) se singularise en celle de $\mathscr{D}_X$-module holonome (à singularités régulières ou même irrégulières le long d'une hypersurface).

Soient $\mathscr{M}', \mathscr{M}''$ deux tels $\mathscr{D}_X$-modules. Je note $\overline{\mathscr{M}''}$ le $\mathscr{D}_{\overline{X}}$-module conjugué de $\mathscr{M}''$. Il est naturel de définir un accouplement sesquilinéaire entre $\mathscr{M}'$ et $\mathscr{M}''$ comme étant un morphisme $\mathscr{D}_X \otimes_{\mathbb{C}} \mathscr{D}_{\overline{X}}$-linéaire k sur $\mathscr{M}' \otimes_{\mathbb{C}} \overline{\mathscr{M}''}$ à valeurs dans le faisceau des distributions $\mathfrak{Db}_X$ sur X. Les questions qui se posent naturellement sont alors les suivantes :

– Qu'est-ce qu'un accouplement non dégénéré ?

– Comment se comporte un tel accouplement par les opérations usuelles sur les $\mathscr{D}_X$-modules (image directe, spécialisation) ?

– Est-ce que la non-dégénérescence est préservée par ces opérations (pour la spécialisation, la propriété de non-dégénérescence est liée à la notion de « contribution effective de la monodromie aux développements asymptotiques » de D. Barlet).

Pour les variations de structure de Hodge polarisée, la décomposition de Hodge fournit l'opérateur de Weil $i^{-w}(-1)^p$ sur $H^{p,w-p}$, qui donne naissance à une forme hermitienne h sur H, dont on demande qu'elle soit définie positive. Par contre, en général, h n'est pas D_V-horizontale.

Pour les fibrés plats avec métrique harmonique (H, D_V, h) (*cf.* Définition 1.4.1), on ne dispose pas d'une forme sesquilinéaire horizontale $k : V \otimes_{\mathbb{C}} \overline{V} \to \mathscr{C}_X^\infty$, car on n'a pas, en général, d'opérateur de Weil pour passer de h à k. Une telle forme k existe néanmoins, non pas sur le $\mathscr{D}_X$-module V, mais sur le $\mathscr{R}_{\mathscr{X}}$-module associé à (H, D_V, h) *via* la construction du § 2.1.a. Il est donc naturel d'introduire la notion d'accouplement sesquilinéaire sur les $\mathscr{R}_{\mathscr{X}}$-modules. Il faudra prendre garde que la notion de conjugaison pour la variable z n'est pas la notion usuelle, mais une notion « twistorielle ». Cette construction permettra d'introduire la catégorie des $\mathscr{D}$-modules avec structure de twisteur polarisée, qui singularise celle des fibrés plats avec métrique harmonique. Les propriétés de ces objets seront étudiées à l'exposé 4.

3.2. Accouplements sesquilinéaires sur les $\mathscr{D}_X$-modules

3.2.a. *Accouplements sesquilinéaires.* Soit $\mathfrak{Db}_X$ le faisceau des distributions sur la variété analytique complexe X : pour tout ouvert U de X, $\Gamma(U, \mathfrak{Db}_X)$ est le dual de l'espace des formes différentielles C^∞ de degré maximum à support compact dans U. C'est un $\mathscr{D}_X$-module à gauche, de même qu'un $\mathscr{D}_{\overline{X}}$-module à gauche (on peut dériver une distribution, et la multiplier par une fonction holomorphe ou anti-holomorphe). Plus précisément, c'est un $\mathscr{D}_X \otimes_{\mathbb{C}} \mathscr{D}_{\overline{X}}$-module à gauche (l'action holomorphe commute à l'action anti-holomorphe).

Le faisceau des courants de degré maximum sur X (dual des fonctions C^∞ à support compact), noté $\mathfrak{C}_X$, est un $\mathscr{D}_X \otimes_{\mathbb{C}} \mathscr{D}_{\overline{X}}$-module à droite. Si on choisit une forme volume ω sur X, on peut écrire $\mathfrak{C}_X = \mathfrak{Db}_X \cdot\omega$.

Étant donnés deux $\mathscr{D}_X$-modules à gauche, un *accouplement sesquilinéaire* k entre $\mathscr{M}'$ et $\mathscr{M}''$ est par définition un morphisme $\mathscr{D}_X \otimes_{\mathbb{C}} \mathscr{D}_{\overline{X}}$-linéaire $k : \mathscr{M}' \otimes_{\mathbb{C}} \overline{\mathscr{M}''} \to \mathfrak{Db}_X$. Pour les modules à droite, l'accouplement prend ses valeurs dans $\mathfrak{C}_X$.

Si $\mathscr{M}$ est un $\mathscr{D}_X$-module à gauche, alors $\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_{\overline{X}}}(\overline{\mathscr{M}}, \mathfrak{Db}_X)$ est muni de la structure de $\mathscr{D}_X$-module à gauche provenant de celle de $\mathfrak{Db}_X$: c'est le dual hermitien de $\mathscr{M}$ (défini par M. Kashiwara). Alors un accouplement sesquilinéaire k entre $\mathscr{M}'$ et $\mathscr{M}''$ n'est pas autre chose qu'un morphisme $\mathscr{D}_X$-linéaire de $\mathscr{M}''$ vers le dual hermitien de $\mathscr{M}'$.

On dit que l'accouplement est *non dégénéré* si ce morphisme est un *isomorphisme.*

Exemples

(1) Le lemme de Dolbeault-Grothendieck nous dit :

Lemme 3.2.1. *L'accouplement $\mathscr{O}_X \otimes_{\mathbb{C}} \mathscr{O}_{\overline{X}} \to \mathscr{C}^\infty_X$ défini par $(f, \overline{g}) \mapsto f \cdot \overline{g}$ est non dégénéré.*

Démonstration. Une section φ de $\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_{\overline{X}}}(\mathscr{O}_{\overline{X}}, \mathfrak{Db}_X)$ est déterminée par la distribution $\varphi(1)$, qui doit satisfaire, pour que φ soit $\mathscr{D}_{\overline{X}}$-linéaire, à l'équation $\overline{\partial}\varphi(1) = \varphi(\overline{\partial}1) = 0$. Ainsi, la distribution $\varphi(1)$ est une fonction holomorphe. $\square$

(2) Soient $\mathscr{M}'$ et $\mathscr{M}''$ deux $\mathscr{D}_X$-modules holonomes *réguliers* qui sont *irréductibles* (*i.e.* sans sous-module ni quotient non trivial). Leur support Z' (resp. Z'') est un ensemble analytique fermé irréductible dans X. Alors,

(a) si $Z' \neq Z''$, tout accouplement sesquilinéaire entre $\mathscr{M}'$ et $\mathscr{M}''$ est nul,

(b) si $Z' = Z''$, un accouplement sesquilinéaire entre $\mathscr{M}'$ et $\mathscr{M}''$ est soit nul, soit non dégénéré, et deux accouplements non dégénérés sont multiples l'un de l'autre par une constante non nulle.

En effet, on interprète l'accouplement comme un morphisme φ de $\mathscr{M}''$ vers le dual hermitien $\widetilde{\mathscr{M}'} = \mathscr{H}om_{\mathscr{D}_{\overline{X}}}(\overline{\mathscr{M}'}, \mathfrak{Db}_X)$. Le dual hermitien est holonome régulier et tout aussi irréductible que $\mathscr{M}'$, avec le même support, d'après un théorème de Kashiwara **[9]**. Alors φ est nul si $Z' \neq Z''$ (considérer $\ker\varphi$) et, si $Z' = Z''$, φ est soit nul, soit un isomorphisme (considérer $\ker\varphi$ et $\operatorname{coker}\varphi$). Enfin, un endomorphisme d'un $\mathscr{D}_X$-module holonome irréductible est un multiple de l'identité (considérer une valeur propre de φ sur une fibre générique de $\mathscr{M}$).

3.2.b. *Image directe*

Cas d'une projection. Soit $f : X = Z \times Y \to Y$ la projection. Posons $n = \dim Z$. Si $\mathscr{M}$ est un $\mathscr{D}_X$-module, la connexion $\nabla : \mathscr{M} \to \Omega^1_X \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{M}$ induite par la structure de $\mathscr{D}_X$-module se décompose en $\nabla_{X/Y} + \nabla_Y$. L'image directe $f_\dagger\mathscr{M}$ (à support propre si f n'est pas propre sur le support de $\mathscr{M}$) est le complexe

$$f_!(\mathscr{E}^{n+\bullet}_{X/Y}\otimes_{\mathscr{O}_X}\mathscr{M},\nabla_{X/Y})$$

muni de la connexion induite par ∇_Y, où $\mathscr{E}^{\ell}_{X/Y}$ désigne le faisceau des ℓ-formes différentielles C^∞ relatives (*i.e.* sans terme en dy).

Soit $k:\mathscr{M}'\otimes_{\mathbb{C}}\overline{\mathscr{M}''}\to\mathfrak{Db}_X$ un accouplement sesquilinéaire. Alors, pour tout $j\in\mathbb{Z}$ on définit l'accouplement

$$(f_\dagger k)^j: f_!(\mathscr{E}^{n-j}_{X/Y}\otimes_{\mathscr{O}_X}\mathscr{M}')\otimes_{\mathbb{C}} f_!(\mathscr{E}^{n+j}_{X/Y}\otimes_{\mathscr{O}_X}\mathscr{M}'')\longrightarrow\mathfrak{Db}_Y$$

par

$$(\eta^{n-j}\otimes m')\otimes\overline{(\eta^{n+j}\otimes m'')}\longmapsto\frac{\varepsilon(n+j)}{(2i\pi)^n}\int_f k(m',\overline{m''})\eta^{n-j}\wedge\overline{\eta^{n+j}},$$

avec $\varepsilon(\ell)\overset{\text{déf}}{=}(-1)^{\ell(\ell-1)/2}$ (mis pour respecter l'orientation). Expliquons la formule : m',m'' sont des sections sur un ouvert $U\times V$, η^{n-j},η^{n+j} sont des formes du degré indiqué à support f-propre sur $U\times V$; si $\dim_{\mathbb{C}}Y=m$, et si φ est une (m,m)-forme C^∞ à support compact dans V, la distribution $\int_f k(m',\overline{m''})\eta^{n-j}\wedge\overline{\eta^{n+j}}$ appliquée à φ est par définition $\langle k(m',\overline{m''}),\eta^{n-j}\wedge\overline{\eta^{n+j}}\wedge\varphi\rangle$.

Notons $\mathscr{N}'^j=f_!(\mathscr{E}^{n+j}_{X/Y}\otimes_{\mathscr{O}_X}\mathscr{M}')$, et de même pour $\mathscr{N}''^j$.

Lemme 3.2.2. *Pour tout $j\in\mathbb{Z}$, le diagramme suivant commute :*

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{N}'^{-j}\otimes\overline{\mathscr{N}''^j} \arrow[rr, "(f_\dagger k)^j"] \arrow[d, "\overline{\nabla_{X/Y}}"'] & & \mathfrak{Db}_Y \arrow[d, equal] \\
\mathscr{N}'^{-j-1}\otimes\overline{\mathscr{N}''^{j+1}} \arrow[u, "\nabla_{X/Y}"] \arrow[rr, "(f_\dagger k)^{j+1}"] & & \mathfrak{Db}_Y
\end{tikzcd}$$

et $(f_\dagger k)^j$ définit un accouplement sesquilinéaire

$$(f_\dagger k)^j:\mathscr{H}^{-j}f_\dagger\mathscr{M}'\otimes_{\mathbb{C}}\overline{\mathscr{H}^j f_\dagger\mathscr{M}''}\longrightarrow\mathfrak{Db}_Y\,.$$

Démonstration. C'est essentiellement la sesquilinéarité de k et la formule de Stokes. $\square$

Cas d'une immersion fermée. Soit $i:X\hookrightarrow Y$ l'inclusion d'une sous-variété fermée. On travaille maintenant avec les courants. Tout courant u sur X s'étend, par image directe notée i_{++}, en un courant sur Y à support dans X : si φ est une fonction C^∞ à support compact sur Y, on pose

$$\langle i_{++}u,\varphi\rangle\overset{\text{déf}}{=}\langle u,\varphi_{|X}\rangle,$$

où $\varphi_{|X}=\varphi\circ i$.

Si $\mathscr{M}$ est un $\mathscr{D}_X$-module à droite, $i_\dagger\mathscr{M}$ est engendré par $i_*\mathscr{M}$ comme $\mathscr{D}_Y$-module à droite. Si $k:\mathscr{M}'\otimes_{\mathbb{C}}\overline{\mathscr{M}''}\to\mathfrak{C}_X$ est un accouplement sesquilinéaire de modules à droite, on compose k avec l'image directe des courants i_++ et on étend par sesquilinéarité pour obtenir un accouplement sesquilinéaire $i_\dagger\mathscr{M}'\otimes_{\mathbb{C}}\overline{i_\dagger\mathscr{M}''}\to\mathfrak{C}_Y$, que l'on note $i_\dagger k$.

Cas général. Pour f quelconque, on écrit $f = p \circ i_f$, où $i_f : X \hookrightarrow X \times Y$ est l'inclusion du graphe de f et $p : X \times Y \to Y$ est la projection. On choisit de travailler à droite ou à gauche, et on transforme par gauche→droite ou droite→gauche les formules précédentes, puis on les compose.

3.2.c. *Spécialisation.* On se place dans la situation du § 2.2.a et on considère un $\mathscr{D}_X$-module holonome $\mathscr{M}$. Alors on sait que $\mathscr{M}$ est spécialisable le long de $t = 0$, c'est-à-dire que toute section locale m satisfait à une équation du type $b_m(-\partial_t t)m \in V_0(\mathscr{D}_X)\cdot m$, où b_m est un polynôme non constant. On définit la filtration canonique de Malgrange-Kashiwara $V_\bullet\mathscr{M}$ indexée par $\mathbb{R}$, de sorte que sur chaque $\mathrm{gr}_a^V\mathscr{M}$ l'opérateur induit par $-\partial_t t$ puisse s'écrire $\prod_{\mathrm{Re}(\alpha)=a}(\alpha\,\mathrm{Id} + \mathrm{N})$ où N est nilpotent. On note alors $\psi_{t,\alpha}\mathscr{M} \subset \mathrm{gr}^V_{\mathrm{Re}(\alpha)}\mathscr{M}$ le sous-module $\ker(\partial_t t + \alpha\,\mathrm{Id})^N$ pour $N \gg 0$ et N l'endomorphisme nilpotent sur $\psi_{t,\alpha}\mathscr{M}$ induit par $-(\partial_t t + \alpha\,\mathrm{Id})$.

Je rappelle sans démonstration quelques propriétés de la V-filtration canonique et des foncteurs $\psi_{t,\alpha}$.

(1) Pour tout $\alpha \neq 0, 1$, on a des isomorphismes commutant avec N :

$$\begin{aligned} t : \psi_{t,\alpha}\mathscr{M} &\longrightarrow \psi_{t,\alpha-1}\mathscr{M} \\ \partial_t : \psi_{t,\alpha}\mathscr{M} &\longrightarrow \psi_{t,\alpha+1}\mathscr{M}. \end{aligned}$$

(2) On définit les morphismes « canonique » et « variation », qui donnent lieu à un diagramme

$$\begin{tikzcd} \psi_{t,-1}\mathscr{M} \arrow[r, bend left, "\mathrm{can} = -\partial_t"] & \psi_{t,0}\mathscr{M} \arrow[l, bend left, "\mathrm{var} = t"] \end{tikzcd}$$

de sorte que $\mathrm{can} \circ \mathrm{var} = \mathrm{N} : \psi_{t,0}\mathscr{M} \to \psi_{t,0}\mathscr{M}$ et $\mathrm{var} \circ \mathrm{can} = \mathrm{N} : \psi_{t,-1}\mathscr{M} \to \psi_{t,-1}\mathscr{M}$.

(3) Pour tout α, il existe une unique filtration croissante $\mathrm{M}_\bullet(\mathrm{N})$, indexée par $\mathbb{Z}$, de $\psi_{t,\alpha}\mathscr{M}$ par des sous-$\mathscr{D}_{X_0}$-modules, telle que

(a) pour tout $\ell \in \mathbb{Z}$, $\mathrm{N}\cdot \mathrm{M}_\ell\psi_{t,\alpha}\mathscr{M} \subset \mathrm{M}_{\ell-2}\psi_{t,\alpha}\mathscr{M}$,

(b) pour tout $\ell \geqslant 1$, N^ℓ induit un isomorphisme $\mathrm{gr}^{\mathrm{M}}_\ell\psi_{t,\alpha}\mathscr{M} \to \mathrm{gr}^{\mathrm{M}}_{-\ell}\psi_{t,\alpha}\mathscr{M}$.

On dit que $\mathrm{M}_\bullet(\mathrm{N})$ est la *filtration monodromique* associée à l'endomorphisme nilpotent. Pour $\ell \geqslant 0$, on appelle partie primitive le sous-module $P\mathrm{gr}^{\mathrm{M}}_\ell\psi_{t,\alpha}\mathscr{M} = \ker \mathrm{N}^{\ell+1} : \mathrm{gr}^{\mathrm{M}}_\ell\psi_{t,\alpha}\mathscr{M} \to \mathrm{gr}^{\mathrm{M}}_{-\ell-2}\psi_{t,\alpha}\mathscr{M}$.

Remarque 3.2.3. Lorsqu'on a affaire à un endomorphisme nilpotent N sur un espace vectoriel de dimension finie, l'existence d'un bloc de Jordan de taille $\ell+1$ exactement pour N équivaut à la non-nullité de la partie primitive d'indice ℓ.

Spécialisation d'un accouplement sesquilinéaire : propriétés attendues

Soit $k : \mathscr{M}' \otimes_{\mathbb{C}} \overline{\mathscr{M}''} \to \mathfrak{Db}_X$ un accouplement sesquilinéaire entre deux $\mathscr{D}_X$-modules holonomes. On cherche à définir, pour tout α tel que $\mathrm{Re}\,\alpha \in [-1, 0[$, un accouplement sesquilinéaire

$$\psi_{t,\alpha}k : \psi_{t,\alpha}\mathscr{M}' \otimes_{\mathbb{C}} \overline{\psi_{t,\alpha}\mathscr{M}''} \longrightarrow \mathfrak{Db}_{X_0}$$

tel que $\psi_{t,\alpha}k(\mathrm{N}m', \overline{m''}) = \psi_{t,\alpha}k(m', \overline{\mathrm{N}m''})$.

Si $\psi_{t,\alpha}k$ est défini, alors la propriété ci-dessus montre que, pour tout $\ell \in \mathbb{Z}$, les accouplements induits sur

$$\mathrm{M}_{-\ell}\psi_{t,\alpha}\mathscr{M}' \otimes_{\mathbb{C}} \overline{M_{\ell-1}\psi_{t,\alpha}\mathscr{M}''} \quad \text{et} \quad \mathrm{M}_{-\ell-1}\psi_{t,\alpha}\mathscr{M}' \otimes_{\mathbb{C}} \overline{M_{\ell}\psi_{t,\alpha}\mathscr{M}''}$$

sont nuls, donc $\psi_{t,\alpha}k$ induit un accouplement

$$\psi_{t,\alpha,\ell}k : \mathrm{gr}^{\mathrm{M}}_{-\ell}\psi_{t,\alpha}\mathscr{M}' \otimes_{\mathbb{C}} \overline{\mathrm{gr}^{\mathrm{M}}_{\ell}\psi_{t,\alpha}\mathscr{M}''} \longrightarrow \mathfrak{Db}_{X_0}.$$

Enfin, en restriction à la partie primitive on obtient un accouplement

$$P_\ell\psi_{t,\alpha}k \overset{\text{déf}}{=} \psi_{t,\alpha,\ell}k(\mathrm{N}^\ell\bullet, \overline{\bullet}) : P\mathrm{gr}^{\mathrm{M}}_{\ell}\psi_{t,\alpha}\mathscr{M}' \otimes_{\mathbb{C}} \overline{P\mathrm{gr}^{\mathrm{M}}_{\ell}\psi_{t,\alpha}\mathscr{M}''} \longrightarrow \mathfrak{Db}_{X_0}.$$

Lemme 3.2.4. *L'accouplement $\psi_{t,\alpha}k$ est non dégénéré si et seulement si tous les accouplements $P_\ell\psi_{t,\alpha}k$ ($\ell \geqslant 0$) le sont.*

Démonstration. On montre d'abord (passage au gradué) que $\psi_{t,\alpha}k$ est non dégénéré si et seulement si tous les accouplements $\psi_{t,\alpha,\ell}k$ ($\ell \in \mathbb{Z}$) le sont. Ensuite, on passe des $\psi_{t,\alpha,\ell}k$ aux $P_\ell\psi_{t,\alpha}k$ par « décomposition de Lefschetz ». □

Spécialisation d'un accouplement sesquilinéaire : définition. L'équation fonctionnelle de Bernstein permet d'obtenir la propriété d'extension méromorphe suivante :

Lemme 3.2.5. *Soient m', m'' deux sections locales de $\mathscr{M}', \mathscr{M}''$. Soient φ une forme C^∞ sur X_0 de degré maximum et χ une fonction C^∞ sur $\mathbb{C}$, toutes deux à support compact, telles que le support (compact) de $\chi\varphi$ soit contenu dans l'ouvert de définition de m' et m''. On suppose de plus que $\chi(t) \equiv 1$ près de $t = 0$. Alors*

(1) *la fonction*

$$s \longmapsto I_{m',m'',\varphi}(s) \overset{\text{déf}}{=} \big\langle k(m', \overline{m''}), |t|^{2s}\varphi \wedge \chi(t)\tfrac{i}{2\pi}\, dt \wedge d\bar{t}\big\rangle$$

définie et holomorphe pour $\mathrm{Re}(s) \gg 0$, se prolonge en une fonction méromorphe ;

(2) *Si m', m'' sont des sections de $V_a\mathscr{M}', V_b\mathscr{M}''$ dont les classes dans $\mathrm{gr}^V_a\mathscr{M}', \mathrm{gr}^V_b\mathscr{M}''$ sont respectivement dans $\psi_{t,\alpha}\mathscr{M}'$ et $\psi_{t,\beta}\mathscr{M}''$, alors les pôles possibles γ de $I_{m',m'',\varphi}(s)$ sont tels que $\mathrm{Re}\,\gamma < (a+b)/2$ et, si $\alpha = \beta$, $\gamma = \alpha = \beta$.* □

Définition 3.2.6. Soit α tel que $\mathrm{Re}(\alpha) \in [-1, 0[$. Si $[m'], [m'']$ sont des sections locales de $\psi_{t,\alpha}\mathscr{M}', \psi_{t,\alpha}\mathscr{M}''$, on définit la distribution $\psi_{t,\alpha}k([m'], \overline{[m'']})$ sur (un ouvert de) X_0 par la formule

$$\langle\psi_{t,\alpha}k([m'], \overline{[m'']}), \varphi\rangle \overset{\text{déf}}{=} \mathrm{Rés}_{s=\alpha}\, I_{m',m'',\varphi}(s) \tag{3.2.6 $*$}$$

où m', m'' sont des relèvements de $[m'], [m'']$ dans $\mathscr{M}', \mathscr{M}''$.

Cette définition a bien un sens :

– pour un choix de relèvements, $I_{m',m'',\varphi}(s)$ n'a de pôle possible qu'en α et en des γ tels que $\mathrm{Re}\,\gamma < \alpha$;

– Il résulte de 3.2.5(2) que la partie polaire de $I_{m',m'',\varphi}(s)$ en $s = \alpha$ ne dépend pas des relèvements choisis ;

– un autre choix de fonction $\chi(t)$ modifie $I_{m',m'',\varphi}(s)$ par l'adjonction d'une fonction entière.

Lemme 3.2.7. *L'accouplement $\psi_{t,\alpha}k$ est sesquilinéaire et est compatible à* N.

La compatibilité à N vient du fait que $t\partial_t|t|^{2s} = \bar{t}\partial_{\bar{t}}|t|^{2s}$.

Contribution effective. Avec des hypothèses supplémentaires sur $\mathscr{M}'$ et $\mathscr{M}''$, la non-dégénérescence est préservée par spécialisation. Plus précisément, il résulte de **[15]** que l'on a

Théorème 3.2.8. *Supposons que $\mathscr{M}'$ et $\mathscr{M}''$ soient des $\mathscr{D}_X$-modules holonomes* réguliers. *Alors l'accouplement sesquilinéaire k est non dégénéré au voisinage de $x^o \in X_0$ si et seulement si les accouplements $\psi_{t,\alpha}k$ (*$\operatorname{Re}\alpha \in [-1,0[$*) et $\phi_{t,0}k$ sont non dégénérés.* □

Je n'ai pas défini l'accouplement « évanescent » $\phi_{t,0}k$. Il est défini par une formule de type Mellin avec un autre noyau que $|t|^{2s}$, afin que $\phi_{t,0}k$ ne soit pas identiquement nul si $\mathscr{M}'$ et $\mathscr{M}''$ sont à support dans X_0 (dans ce cas, tous les $\psi_{t,\alpha}k$ sont identiquement nuls).

***Corollaire 3.2.9* (contribution effective de la monodromie).** *On suppose $\mathscr{M}'$ et $\mathscr{M}''$ holonomes* réguliers. *Soit k un accouplement sesquilinéaire non dégénéré entre $\mathscr{M}'$ et $\mathscr{M}''$. Si x^o est dans le support de $P_\ell\psi_{t,\alpha}\mathscr{M}'$ et $P_\ell\psi_{t,\alpha}\mathscr{M}''$, alors il existe des sections locales m', m'' de $\mathscr{M}', \mathscr{M}''$ et il existe une forme C^∞ à support compact φ sur X_0 telles que la fonction méromorphe $I_{m',m'',\varphi}(s)$ ait un pôle d'ordre $\ell+1$ exactement en $s=\alpha$.*

Démonstration. Par non-dégénérescence de k et d'après le théorème 3.2.8, il existe des sections locales m', m'' de $V_{\operatorname{Re}(\alpha)}\mathscr{M}'$, $V_{\operatorname{Re}(\alpha)}\mathscr{M}''$ au voisinage de x^o dont les classes mod $V_{<\operatorname{Re}(\alpha)}$ sont dans $\mathrm{M}_\ell\psi_{t,\alpha}$ et les classes de ces dernières dans $\mathrm{gr}_\ell^{\mathrm{M}}\psi_{t,\alpha}$ sont dans $P_\ell\psi_{t,\alpha}$, et telles que $P_\ell\psi_{t,\alpha}k(\mathrm{N}^\ell[m'], \overline{[m'']}) \neq 0$. Soit φ une forme telle que $\langle P_\ell\psi_{t,\alpha}k(\mathrm{N}^\ell[m'], \overline{[m'']}), \varphi\rangle \neq 0$. Alors $I_{(\partial_t t+\alpha)m',m'',\varphi}(s)$ a un résidu non nul en $s=\alpha$, et on peut montrer, de manière analogue au lemme 3.2.5(2), que le pôle de $I_{[-(\partial_t t+\alpha)]^\ell m',m'',\varphi}(s)$ est simple. On utilise ensuite que $I_{[-(\partial_t t+\alpha)]^\ell m',m'',\varphi}(s)$ et $(s-\alpha)^\ell \cdot I_{m',m'',\varphi}(s)$ ont même partie fractionnaire en α. □

***Remarque 3.2.10* (contribution sur-effective).** Supposons que $\mathscr{M}$ soit *extension minimale* le long de X_0 en x^o, c'est-à-dire que can soit *surjectif* et var soit *injectif* en x^o. Alors on sait que

$$(P_\ell\psi_{t,0}\mathscr{M})_{x^o} \neq 0 \Longrightarrow (P_{\ell+1}\psi_{t,-1}\mathscr{M})_{x^o} \neq 0.$$

Si, dans le corollaire précédent, on suppose que x^o est dans le support des modules $P_\ell\psi_{t,0}\mathscr{M}'$ et $P_\ell\psi_{t,0}\mathscr{M}''$, et si $\mathscr{M}', \mathscr{M}''$ sont extension minimale le long de X_0, il en résulte qu'il existe m', m'', φ tels que $I_{m',m'',\varphi}(s)$ ait un pôle d'ordre $\ell+2$ exactement en $s=-1$.

Indiquons maintenant comment ces résultats s'interprètent dans une situation plus « réaliste » où la fonction t n'est pas une projection.

Soit donc f une fonction holomorphe sur la variété X_0. Supposons donnés deux $\mathscr{D}_{X_0}$-modules holonomes réguliers $\mathscr{N}'$ et $\mathscr{N}''$, avec un accouplement sesquilinéaire $k : \mathscr{N}' \otimes_{\mathbb{C}} \overline{\mathscr{N}''} \to \mathfrak{Db}_{X_0}$, satisfaisant aux hypothèses suivantes :

(1) l'accouplement k est non dégénéré,

(2) $\mathscr{N}'$ et $\mathscr{N}''$ n'ont ni sous-module ni quotient à support dans l'hypersurface $f=0$.

Exemple. Cette situation est réalisée pour $\mathscr{N}'=\mathscr{N}''=\mathscr{O}_{X_0}$ (qui est holonome régulier), d'après le lemme de Dolbeault-Grothendieck 3.2.1.

Plus généralement, soit $\mathscr{L}$ un faisceau localement constant de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels de dimension finie sur $X_0 \smallsetminus \{f=0\}$ et soit $\mathrm{IC}^\bullet(\mathscr{L})$ le *complexe d'intersection* associé à $\mathscr{L}$. Il lui correspond un $\mathscr{D}_{X_0}$-module holonome régulier $\mathscr{N}'$, qui satisfait $\mathrm{DR}\,\mathscr{N}' = \mathrm{IC}^\bullet(\mathscr{L})$. Par construction, $\mathscr{N}'$ n'a ni sous-module ni quotient à support dans $\{f=0\}$. Soit $\mathscr{N}'' = \mathscr{H}om_{\mathscr{D}_{\overline{X_0}}}(\overline{\mathscr{N}'}, \mathfrak{Db}_{X_0})$ le dual hermitien de $\mathscr{N}'$ au sens de Kashiwara. D'après le théorème de Kashiwara déjà cité, le $\mathscr{D}_{X_0}$-module $\mathscr{N}''$ est holonome régulier et il n'a ni sous-module ni quotient à support dans $\{f=0\}$. Son complexe de de Rham est d'ailleurs, isomorphe à $\mathrm{IC}^\bullet(\mathscr{L}^*)$, si $\mathscr{L}^*$ est le système local adjoint (*i.e.* dual conjugué) de $\mathscr{L}$. Par construction, l'accouplement naturel $\mathscr{N}' \otimes_{\mathbb{C}} \overline{\mathscr{N}''} \to \mathfrak{Db}_{X_0}$ est non dégénéré.

Revenons à $\mathscr{N}', \mathscr{N}'', k$ satisfaisant aux hypothèses (1) et (2). Soit i_f l'inclusion $X_0 \hookrightarrow X = X_0 \times \mathbb{C}$ associée au graphe de f et posons, si $\mathscr{N} = \mathscr{N}', \mathscr{N}''$,

$$\mathscr{M} = i_{f+}\mathscr{N} = \oplus_{\ell \geqslant 0} \mathscr{N} \cdot \partial_t^\ell \delta(t-f).$$

Alors l'accouplement k entre $\mathscr{N}'$ et $\mathscr{N}''$ induit un accouplement $i_{f+}k$ entre $\mathscr{M}'$ et $\mathscr{M}''$, qui reste non dégénéré. D'autre part, $\mathscr{M}'$ et $\mathscr{M}''$ n'ont ni sous-module ni quotient à support dans $\{t=0\}$. Cette dernière propriété est alors équivalente au fait que $\mathrm{can} : \psi_{t,-1}\mathscr{M} \to \psi_{t,0}\mathscr{M}$ est surjectif et $\mathrm{var} : \psi_{t,0}\mathscr{M} \to \psi_{t,-1}\mathscr{M}$ est injectif, pour $\mathscr{M} = \mathscr{M}', \mathscr{M}''$.

On obtient alors :

Corollaire 3.2.11. *Sous ces conditions,*

(1) *soit $\alpha \in [-1,0[$, $\ell \in \mathbb{N}$, et soit x^o dans le support de $P_\ell\psi_{t,\alpha}\mathscr{M}'$ et $P_\ell\psi_{t,\alpha}\mathscr{M}''$; alors il existe des sections locales n', n'' de $\mathscr{N}', \mathscr{N}''$, une forme φ, C^∞ sur X_0, de degré maximum, à support compact contenu dans un voisinage de x^o où n' et n'' sont définies, et un entier $p \geqslant 0$, tels que (le prolongement méromorphe de) la fonction*

(holomorphe pour $\mathrm{Re}(s) \gg 0$*)*

$$s \longmapsto \Big\langle k(n', \overline{n''}), |f|^{2(s-p)}\,\varphi \Big\rangle$$

ait un pôle d'ordre exactement $\ell+1$ *en* α *;*

(2) *si* x^o *est dans le support de* $P_\ell\psi_{t,0}\mathscr{M}'$ *et* $P_\ell\psi_{t,0}\mathscr{M}''$*, alors le même résultat vaut avec* $\alpha=-1$ *et* $\ell+1$ *remplacé par* $\ell+2$.

***Remarque 3.2.12* (importante).** La condition « x^o dans le support de $P_\ell\psi_{t,\alpha}$ » signifie que l'endomorphisme nilpotent N « a un bloc de Jordan de taille $\ell+1$ exactement », mais ceci n'a pas vraiment de sens si $\psi_{t,\alpha}$ n'est pas un espace vectoriel de dimension fini ou, par exemple, un $\mathscr{O}_Z$-module libre de rang fini, si Z désigne le support du faisceau $P_\ell\psi_{t,\alpha}$. En passant au complexe de de Rham, $\exp -2i\pi\mathrm{N}$ est la partie unipotente de la monodromie correspondant à la valeur propre $\exp -2i\pi\alpha$, sur le *faisceau pervers* $\mathrm{DR}\,\mathscr{M}$. Bien que la partie primitive $P_\ell\psi_{t,\exp -2i\pi\alpha}\,\mathrm{DR}\,\mathscr{M}$ ait un sens, celle de bloc de Jordan n'en a pas en général.

Cependant, si x^o est une singularité *isolée* pour la valeur propre $\exp -2i\pi\alpha$, c'est-à-dire si le faisceau pervers $\psi_{t,\exp -2i\pi\alpha}\,\mathrm{DR}\,\mathscr{M}$ est à support ponctuel, celui-ci correspond à un espace vectoriel et, dans ce cas, l'hypothèse signifie (*cf.* remarque 3.2.3) que la partie nilpotente de la monodromie pour la valeur propre $\exp -2i\pi\alpha$ a un bloc de Jordan de taille $\ell+1$ exactement. On peut faire un raisonnement analogue, plus généralement, si $\psi_{t,\exp -2i\pi\alpha}\,\mathrm{DR}\,\mathscr{M}$ est un faisceau localement constant au voisinage de x^o.

Donnons une interprétation géométrique peut-être plus explicite de la condition « x^o dans le support de $P_\ell\psi_{t,\alpha}$ ». Pour simplifier l'argument, supposons que $\mathscr{N}' = \mathscr{N}'' = \mathscr{O}_{X_0}$ et posons $\mathscr{M} = \mathscr{M}' = \mathscr{M}''$. On peut voir que la condition sur x^o est équivalente à la condition suivante : il existe r fonctions linéaires générales $g_1,\dots,g_r$ (où r est la dimension en x^o du support Z de $P_\ell\psi_{t,\alpha}\mathscr{M}$) telles que la monodromie associée à la fonction f sur une fibre de Milnor

$$B_\varepsilon(x^o)\cap f^{-1}(\eta)\cap g_1^{-1}(\eta_1)\cap\cdots\cap g_r^{-1}(\eta_r)\quad \text{avec } 0<\eta_r\ll\cdots\ll\eta_1\ll\eta\ll\varepsilon$$

ait un bloc de Jordan de taille exactement $\ell+1$ pour la valeur propre $\exp -2i\pi\alpha$.

Exemple. Si on choisit $\mathscr{N}' = \mathscr{N}'' = \mathscr{O}_{X_0}$, alors n' et n'' sont des fonctions holomorphes qu'on peut « rentrer » dans φ, de sorte que la fonction du corollaire peut s'écrire (en changeant φ) :

$$s \longmapsto \int_{X_0} |f|^{2(s-p)}\,\varphi.$$

Démonstration du corollaire 3.2.11. Indiquons la démonstration du premier point. Le second résulte alors de la remarque 3.2.10. On choisit m', m'', φ donnés par le corollaire 3.2.9. On peut écrire $m' = \sum_i n'_i\partial_t^i\delta(t-f)$ et $m'' = \sum_j n''_j\partial_t^j\delta(t-f)$. Par ailleurs, on a

$$
\begin{aligned}
&\big\langle i_{f+}k(n'_i\partial_t^i\delta(t-f),\overline{n''_j\partial_t^j\delta(t-f)}),\varphi\cdot|t|^{2s}\chi(t)\tfrac{i}{2\pi}\,dt\wedge d\overline{t}\big\rangle\\
&\quad=\big\langle\partial_t^i\overline{\partial}_t^j i_{f+}k(n'_i\delta(t-f),\overline{n''_j\delta(t-f)}),\varphi\cdot|t|^{2s}\chi(t)\tfrac{i}{2\pi}\,dt\wedge d\overline{t}\big\rangle\\
&\quad=\Big\langle i_{f+}k(n'_i\delta(t-f),\overline{n''_j\delta(t-f)}),\varphi\cdot(-\partial_t)^i(-\overline{\partial}_t)^j(|t|^{2s}\chi(t))\tfrac{i}{2\pi}\,dt\wedge d\overline{t}\Big\rangle\\
&\quad=(-1)^{i+j}\prod_{\mu=0}^{i-1}(s-\mu)\prod_{\nu=0}^{j-1}(s-\nu)\\
&\qquad\cdot\Big\langle i_{f+}k(n'_i\delta(t-f),\overline{n''_j\delta(t-f)}),\varphi\cdot t^{-i}\overline{t}^{-j}|t|^{2s}\chi(t)\tfrac{i}{2\pi}\,dt\wedge d\overline{t}\Big\rangle+h(s),
\end{aligned}
$$

avec $h(s)$ entière (car les dérivées de $\chi(t)$ sont identiquement nulles près de $t=0$). Maintenant, le dernier crochet se récrit, par définition de i_{f+}, sous la forme

$$\Big\langle k(n'_i,\overline{n''_j}),\varphi\cdot f^{-i}\overline{f}^{-j}\,|f|^{2s}\,\chi(f)\Big\rangle$$

et, en re-notant φ la fonction $\varphi\chi(f)$, le corollaire 3.2.9 dit que la fonction

$$\sum_{i,j}(-1)^{i+j}\prod_{\mu=0}^{i-1}(s-\mu)\prod_{\nu=0}^{j-1}(s-\nu)\Big\langle k(n'_i,\overline{n''_j}),\varphi\cdot f^{-i}\overline{f}^{-j}\,|f|^{2s}\Big\rangle$$

a un pôle d'ordre exactement $\ell+1$ en $s=\alpha$. Soit $p\geqslant 0$ tel que la somme porte sur les $i,j\leqslant p$. Posons

$$n'=\sum_{i=0}^{p}(-1)^i\prod_{\mu=0}^{i-1}(\alpha-\mu)f^{p-i}n'_i\quad\text{et}\quad n''=\sum_{j=0}^{p}(-1)^j\prod_{\nu=0}^{j-1}(\alpha-\nu)f^{p-j}n''_j.$$

Puisque $\operatorname{Re}(\alpha)\in[-1,0[$, on en déduit que la fonction

$$s\longmapsto\Big\langle k(n',\overline{n''}),\varphi\cdot|f|^{2(s-p)}\Big\rangle$$

a un pôle d'ordre exactement $\ell+1$ en $s=\alpha$. $\square$

3.3. Accouplements sesquilinéaires sur les $\mathscr{R}_X$-modules

3.3.a. *Conjugaison twistorielle.* Commençons par définir la notion de conjugaison d'un $\mathscr{O}_{\mathscr{X}}$-module ou d'un $\mathscr{R}_{\mathscr{X}}$-module (comme à l'exposé 2, on note $\mathscr{X}=X\times\Omega_0$ si X est une variété analytique complexe). La conjugaison ne transforme pas z en son conjugué usuel, que je note $c(z)$ pour éviter les confusions, mais en $\overline{z}\overset{\text{déf}}{=}-1/z$.

Plus précisément, soit $\sigma:\mathbb{P}^1\to c\mathbb{P}^1$ ou $c\mathbb{P}^1\to\mathbb{P}^1$ l'application $z\mapsto -1/c(z)$ ou $c(z)\mapsto -1/z$ (ici, $c\mathbb{P}^1$ est $\mathbb{P}^1$ avec la structure complexe conjuguée au sens usuel). Si $f(x,z)$ est une fonction des variables $x\in X$ et $z\in\Omega_0$, je note $\overline{f}$ la fonction $\overline{f(x,\sigma(z))}$. Ainsi, $\overline{\sum_i a_i(x)z^i}=\sum_i\overline{a_i(x)}(-1/z)^i$ (la conjugaison est la conjugaison usuelle pour les fonctions de x uniquement). Si f est holomorphe sur un ouvert $U\times\Omega$ de $X\times\Omega_0$, alors $\overline{f}$ est holomorphe sur l'ouvert $\overline{U}\times c\sigma(\Omega)$ de $\overline{X}\times\Omega_\infty$.

De même, si $\mathscr{F}$ est un faisceau de $\mathscr{O}_{U\times\Omega}$-modules, le faisceau $\overline{\mathscr{F}} \overset{\text{déf}}{=} c\sigma^*\mathscr{F}$ est un faisceau de $\mathscr{O}_{\overline{U}\times c\sigma(\Omega)}$-modules. Idem pour les $\mathscr{R}_{\mathscr{X}}$-modules, où la dérivation $\eth_{x_i} = z\partial_{x_i}$ se conjugue en $(-1/z)\overline{\partial}x_i$.

3.3.b. *Le cas où X est un point.* Cette situation n'est pas complètement triviale, car il subsiste les fonctions de z. Je note $\mathbf{S}$ le cercle unité $|z| = 1$ et $\mathscr{O}_{\mathbf{S}}$ la restriction faisceautique de $\mathscr{O}_{\Omega_0}$ à $\mathbf{S}$ (germes de fonctions holomorphes le long de $\mathbf{S}$, ou encore germes de fonctions analytiques réelles à valeurs complexes *sur* $\mathbf{S}$).

L'ensemble $\mathbf{S}$ est laissé invariant par l'application $\sigma : z \mapsto -1/c(z)$ et, sur $\mathbf{S}$, on a $\sigma(z) = -z$.

Étant donnés deux $\mathscr{O}_{\Omega_0}$-modules $\mathscr{H}'$ et $\mathscr{H}''$, un accouplement sesquilinéaire entre $\mathscr{H}'$ et $\mathscr{H}''$ est un morphisme $\mathscr{O}_{\mathbf{S}}$-linéaire

$$C : \mathscr{H}'_{|\mathbf{S}} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathbf{S}}} \overline{\mathscr{H}''_{|\mathbf{S}}} \longrightarrow \mathscr{O}_{\mathbf{S}}.$$

On dit que C est *non dégénéré* si le morphisme induit $\overline{\mathscr{H}''_{\mathbf{S}}} \to \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_{\mathbf{S}}}(\mathscr{H}'_{|\mathbf{S}}, \mathscr{O}_{\mathbf{S}})$ est un isomorphisme.

Un cas important est celui où $\mathscr{H}'$ et $\mathscr{H}''$ sont des fibrés vectoriels de même rang (fini). Alors un accouplement non dégénéré n'est pas autre chose qu'un isomorphisme de $\overline{\mathscr{H}''_{\mathbf{S}}}$ sur $\mathscr{H}'^{\vee}_{|\mathbf{S}}$ (fibré dual), donc un *recollement* entre le fibré $\mathscr{H}'^{\vee}$ (carte Ω_0) et le fibré $\overline{\mathscr{H}''}$ (carte Ω_∞). Ainsi, la donnée de C non dégénéré fournit un *fibré vectoriel holomorphe sur* $\mathbb{P}^1$).

***Définition 3.3.1* (la catégorie $\mathscr{R}$-Triples(pt)).** C'est la catégorie dont les objets sont les triplets $\mathscr{T} = (\mathscr{H}', \mathscr{H}'', C)$, où $\mathscr{H}', \mathscr{H}''$ sont deux $\mathscr{O}_{\Omega_0}$-modules et $C : \mathscr{H}'_{|\mathbf{S}} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathbf{S}}} \overline{\mathscr{H}''_{|\mathbf{S}}} \to \mathscr{O}_{\mathbf{S}}$ est un accouplement sesquilinéaire, et où les morphismes $\varphi : \mathscr{T}_1 \to \mathscr{T}_2$ sont les couples (φ', φ'') avec $\varphi' : \mathscr{H}'_2 \to \mathscr{H}'_1$ et $\varphi'' : \mathscr{H}''_1 \to \mathscr{H}''_2$ $\mathscr{O}_{\Omega_0}$-linéaires, satisfaisant à

$$C_1(\varphi'(m'_2), \overline{m''_1}) = C_2(m'_2, \overline{\varphi''(m''_1)}).$$

– (Twist de Tate) Pour tout $k \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$, on note $\mathscr{T}(k) = (\mathscr{H}', \mathscr{H}'', (iz)^{-2k}C)$.

– (Adjonction) On note $\mathscr{T}^* = (\mathscr{H}'', \mathscr{H}', C^*)$ avec $C^*(m'', \overline{m'}) \overset{\text{déf}}{=} \overline{C(m', \overline{m''})}$.

– (Twisteurs) On dit que $\mathscr{T}$ est un *twisteur pur de poids* $w \in \mathbb{Z}$ si $\mathscr{T}$ définit un fibré vectoriel sur $\mathbb{P}^1$ isomorphe au fibré trivial tensorisé par $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(w)$.

Remarques 3.3.2

(1) Si $\mathscr{T}$ est un twisteur pur de poids w, alors $\mathscr{T}(k)$ est un twisteur pur de poids $w-2k$ et $\mathscr{T}^*$ est un twisteur pur de poids $-w$.

(2) Il n'y a pas de morphisme non trivial d'un twisteur pur de poids w vers un twisteur pur de poids $w' < w$.

(3) La catégorie des twisteurs purs de poids 0 (où les morphismes sont tous les morphismes dans $\mathscr{R}$-Triples(pt)) est équivalente à celle des espaces vectoriels de dimension finie (par le foncteur « prendre les sections globales du fibré associé »).

3.3.c. *Le cas général.* On suppose maintenant que X est une variété complexe de dimension n.

Distributions continues par rapport à $\mathbf{S}$. Je note $\mathfrak{Db}_{X_\mathbb{R}\times\mathbf{S}/\mathbf{S}}$ le faisceau sur $X\times\mathbf{S}$ des distributions sur $X\times\mathbf{S}$ qui sont continues par rapport à $\mathbf{S}$ (on pourrait demander une régularité plus grande par rapport à $\mathbf{S}$, mais il n'est pas utile de se fatiguer). Une section sur un ouvert W de $X\times\mathbf{S}$ de $\mathfrak{Db}_{X_\mathbb{R}\times\mathbf{S}/\mathbf{S}}$ est une application $C^\infty(\mathbf{S})$-linéaire $\mathscr{E}^{(n,n)}_{X\times\mathbf{S}/\mathbf{S},c}(W)\to C^0(\mathbf{S})$ qui est continue pour la norme usuelle sur $C^0(\mathbf{S})$ et la famille des semi-normes sur $\mathscr{E}^{(n,n)}_{X\times\mathbf{S}/\mathbf{S},c}(W)$ (formes différentielles C^∞ à support compact sans différentielle par rapport à $\mathbf{S}$) obtenues en prenant le sup sur un compact de W des dérivations jusqu'à un certain ordre en x. Sur un compact donné de W, le plus petit ordre de dérivation nécessaire pour une distribution u est l'ordre de u sur ce compact.

Une section u de $\mathfrak{Db}_{X_\mathbb{R}\times\mathbf{S}/\mathbf{S}}$ peut se restreindre par rapport à z, et $u_{|z=z_o}$ est une distribution usuelle sur X.

Le faisceau $\mathfrak{Db}_{X_\mathbb{R}\times\mathbf{S}/\mathbf{S}}$ est muni d'une action naturelle de $\mathscr{R}_\mathscr{X}$ et de $\mathscr{R}_{\overline{\mathscr{X}}}$ qui commutent. C'est donc un $\mathscr{R}_\mathscr{X}\otimes_{\mathscr{O}_\mathbf{S}}\mathscr{R}_{\overline{\mathscr{X}}}$-module à gauche.

La catégorie $\mathscr{R}$- Triples(X). C'est la catégorie dont les objets sont les triplets $\mathscr{T}=(\mathscr{M}',\mathscr{M}'',C)$, où $\mathscr{M}',\mathscr{M}''$ sont deux $\mathscr{R}_\mathscr{X}$-modules et $C=\mathscr{M}'_{|\mathbf{S}}\otimes_{\mathscr{O}_\mathbf{S}}\overline{\mathscr{M}''_{|\mathbf{S}}}\to\mathfrak{Db}_{X_\mathbb{R}\times\mathbf{S}/\mathbf{S}}$ est un accouplement $\mathscr{R}_\mathscr{X}\otimes_{\mathscr{O}_\mathbf{S}}\mathscr{R}_{\overline{\mathscr{X}}}$-linéaire.

Remarque 3.3.3 **(restriction à** $z=z_o$**).** Soit $z_o\in\mathbf{S}$. Les restrictions $M'=\mathscr{M}'_{z_o}$ et $M''=\mathscr{M}''_{-z_o}$ sont des $\mathscr{D}_X$-modules (rappelons que, pour $z_o\in\mathbf{S}$ on a $\sigma(z_o)=-z_o$), et C induit un accouplement sesquilinéaire $M'\otimes_\mathbb{C} M''\to\mathfrak{Db}_X$. Il faut noter que, même si $\mathscr{M}'=\mathscr{M}''=\mathscr{M}$, l'accouplement C accouple $\mathscr{M}$ et $\mathscr{M}$ en des fibres opposées, donc en général $M'\neq M''$.

3.3.d. *Image directe et spécialisation.* On définit l'image directe d'un accouplement C exactement comme au § 3.2.b (voir [**16**] pour plus de précisions). Si $f:X\to Y$ est une application analytique entre deux variétés, et $\mathscr{T}$ un objet de $\mathscr{R}$- Triples(X), on obtient ainsi des objets $\mathscr{H}^j f_\dagger\mathscr{T}=(\mathscr{H}^{-j}f_\dagger\mathscr{M}',\mathscr{H}^j f_\dagger\mathscr{M}'',\mathscr{H}^j f_\dagger C)$ de $\mathscr{R}$- Triples(Y).

Dans la situation du paragraphe § 2.2.a, on suppose que $\mathscr{M}'$ et $\mathscr{M}''$ sont strictement spécialisables le long de $\{t=0\}$. Alors on a l'analogue du lemme 3.2.5 avec les modifications suivantes : il faut travailler au voisinage de $z_o\in\mathbf{S}$ pour m' et $-z_o$ pour m'', car les V-filtrations ne sont définies que localement par rapport à z_o. La fonction $I_{m',m'',\varphi}(s,z)$ dépend maintenant de z et ses pôles sont sur des ensembles $s=\gamma\star z$, avec γ comme dans le lemme 3.2.5. On définit alors $\psi_{t,\alpha}C$ par une formule de résidu analogue à 3.2.6 $*$. On pose alors $\psi_{t,\alpha}\mathscr{T}=(\psi_{t,\alpha}\mathscr{M}',\psi_{t,\alpha}\mathscr{M}'',\psi_{t,\alpha}C)$ pour tout $\alpha\in\mathbb{C}$.

Enfin, si $f:X\to\mathbb{C}$ est une fonction holomorphe quelconque, on note $i_f:X\hookrightarrow X\times\mathbb{C}$ l'inclusion du graphe de f et $\psi_{f,\alpha}\mathscr{T}\overset{\text{déf}}{=}\psi_{t,\alpha}i_{f+}\mathscr{T}$.

4. $\mathscr{D}$-modules avec structure de twisteur polarisée

Dans cet exposé, je vais expliquer comment singulariser la notion de fibré plat avec métrique harmonique. Les objets que l'on obtient, dans le cas des modules holonomes réguliers, satisfont à un théorème de Lefschetz difficile et à un théorème de décomposition (*cf.* [**16**]). D'autre part, sur une variété projective lisse, il y a équivalence entre la catégorie de ces objets et celle des faisceaux pervers semi-simples : pour les objets lisses, c'est le théorème de Corlette 1.5.1 ; pour les objets (singuliers) sur les courbes, c'est essentiellement dû à C. Simpson [**19**] (*cf.* aussi [**16**, chap. 5] pour une traduction précise en terme de $\mathscr{D}$-modules avec structure de twisteur polarisée) ; pour les objets qui ont des singularités le long d'un diviseur lisse, le résultat est dû à O. Biquard [**4**] et, lorsque le diviseur est à croisements normaux, il est dû à T. Mochizuki [**13, 14**] ; enfin, on utilise le théorème de décomposition de [**16**] pour avoir l'équivalence en toute généralité.

4.1. Introduction : le langage des twisteurs polarisés. Reprenons la situation du § 3.3.c. Il est d'abord utile d'introduire, de manière générale, la notion de *dualité sesquilinéaire* pour les objets de $\mathscr{R}$- Triples(X). La notion d'adjonction et de twist de Tate se définit comme en 3.3.1.

***Définition 4.1.1* (dualité sesquilinéaire de poids w).** Soit w un entier. On appelle dualité sesquilinéaire de poids w sur un objet $\mathscr{T}$ de $\mathscr{R}$- Triples un morphisme $\mathscr{S} : \mathscr{T} \to \mathscr{T}^*(-w)$. On dit qu'une telle dualité de poids w est *hermitienne* si elle satisfait à $\mathscr{S}^* = (-1)^w \mathscr{S}$.

Explicitons cette définition : on écrit $\mathscr{T} = (\mathscr{M}', \mathscr{M}'', C)$. On a alors $\mathscr{S} = (S', S'')$, où S', S'' sont deux morphismes $\mathscr{R}_{\mathscr{X}}$-linéaires $\mathscr{M}'' \to \mathscr{M}'$, qui doivent satisfaire, pour toutes sections locales m''_1, m''_2 de $\mathscr{M}''$, à

$$C(S'm''_1, \overline{m''_2}) = (iz)^w C^*(m''_1, \overline{S''m''_2}).$$

La dualité $\mathscr{S}$ est alors hermitienne si et seulement si $S' = (-1)^w S''$.

4.1.a. *Twisteurs polarisés sur le point.* Soit $\mathscr{T} = (\mathscr{H}', \mathscr{H}'', C)$ un twisteur pur de poids 0 sur le point (*cf.* définition 3.3.1). Alors $\mathscr{T}$ définit un fibré trivial $\widetilde{\mathscr{H}}$ sur $\mathbb{P}^1$ (en recollant le dual $\mathscr{H}'^\vee$ avec le conjugué $\overline{\mathscr{H}''}$ à l'aide de C), et le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des sections globales $\Gamma(\mathbb{P}^1, \widetilde{\mathscr{H}})$ est noté $\overline{H}$. Son conjugué H s'injecte dans $\mathscr{H}''$, on note H'' son image ; de même, $\overline{H}$ s'injecte dans $\mathscr{H}'^\vee$ de manière naturelle, et on a

$$\mathscr{H}'^\vee = \mathscr{O}_{\Omega_0} \otimes_{\mathbb{C}} \overline{H} \quad \text{et} \quad \mathscr{H}'' = \mathscr{O}_{\Omega_0} \otimes_{\mathbb{C}} H''.$$

On a alors aussi une inclusion de $\overline{H}^\vee$ dans $\mathscr{H}'$, et on note H' son image, de sorte que $\mathscr{H}' = \mathscr{O}_{\Omega_0} \otimes_{\mathbb{C}} H'$. La restriction de C à $H' \otimes_{\mathbb{C}} \overline{H}''$ est la dualité naturelle entre $\overline{H}$ et son dual.

Une dualité sesquilinéaire $\mathscr{S}$ de poids 0 induit alors un isomorphisme $S : H'' \xrightarrow{\sim} H'$ de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels, de sorte que $C(S''\bullet, \overline{\bullet})$ devient une forme sesquilinéaire $h : H \otimes_{\mathbb{C}} \overline{H} \to \mathbb{C}$. De plus, $\mathscr{S}$ est hermitienne si et seulement si h l'est.

On dit que $\mathscr{S}$ est une*polarisation de* $\mathscr{T}$ si h est définie positive.

Remarque 4.1.2. On voit que la donnée de $(\mathscr{T}, \mathscr{S})$ est équivalente à celle de (H, h), et peut paraître plus compliquée. C'est cependant cette donnée qui se singularise bien.

***Remarque 4.1.3* (poids w quelconque).** On peut étendre ces notions pour des twisteurs purs de poids $w \in \mathbb{Z}$ en utilisant la *réduction au poids* 0 :

– si $\mathscr{T}$ est pur de poids w, on pose $\widetilde{\mathscr{T}} = \mathscr{T}(w/2)$, qui est pur de poids 0 ;

– si $\mathscr{S} : \mathscr{T} \to \mathscr{T}^*(-w)$ est une dualité sesquilinéaire de poids w, on pose $\mathscr{S} = (S', S'')$ et on note $\widetilde{\mathscr{S}} = ((-1)^w S', S'')$. Alors $\widetilde{\mathscr{S}}$ est une dualité sesquilinéaire de poids 0 sur $\widetilde{\mathscr{T}}$. Si $\mathscr{S}$ est hermitienne, il en est de même de $\widetilde{\mathscr{S}}$. On dit que $\mathscr{S}$ est *définie positive* si $\widetilde{\mathscr{S}}$ l'est, au sens donné ci-dessus.

4.1.b. *Variations de structure de twisteur polarisée.* Une variation de structure de twisteur de poids 0, ou twisteur lisse de poids 0, sur une variété X est la donnée d'un objet *lisse* $\mathscr{T} = (\mathscr{M}', \mathscr{M}'', C)$ de $\mathscr{R}$-$\mathrm{Triples}(X)$ (*i.e.* tel que $\mathscr{M}'$ et $\mathscr{M}''$ soient des $\mathscr{O}_{\mathscr{X}}$-modules localement libres de rang fini, ce qui implique que C prend ses valeurs dans le faisceau des fonctions C^∞) tel que la restriction à chaque point de X soit un twisteur pur de poids 0 (la restriction de C a bien un sens, puisque C prend ses valeurs dans les fonctions C^∞).

Une polarisation de $\mathscr{T}$ est alors une dualité hermitienne $\mathscr{S} : \mathscr{T} \to \mathscr{T}^*$ de poids 0 dont la restriction à chaque point de X induit une polarisation comme définie plus haut.

La construction ponctuelle du § 4.1.a se fait en famille pour donner un fibré qu'on note H, muni d'une métrique hermitienne h, à partir de $(\mathscr{T}, \mathscr{S})$. Il faut prendre garde que le fibré $\widetilde{\mathscr{H}}$ est holomorphe par rapport à la variable de $\mathbb{P}^1$, mais C^∞ (analytique réel en fait) par rapport à X.

Dans cette construction, il ne faut pas oublier la structure de $\mathscr{R}_{\mathscr{X}}$-module. La restriction de $\mathscr{H}'$ à $z = 1$ est un fibré holomorphe V, muni d'une connexion plate ∇ (action de $\mathscr{D}_X = \mathscr{R}_{\mathscr{X}}/(z-1)\mathscr{R}_{\mathscr{X}}$). On a $H = \mathscr{C}_X^\infty \otimes_{\mathscr{O}_X} V$, d'où une connexion plate D_V sur H.

De même, la restriction de $\mathscr{H}'$ à $z = 0$ est un fibré holomorphe E, muni d'un champ de Higgs θ'_E (action de $\mathscr{O}_X[TX] = \mathscr{R}_{\mathscr{X}}/z\mathscr{R}_{\mathscr{X}}$). On a aussi $H = \mathscr{C}_X^\infty \otimes_{\mathscr{O}_X} E$. On en déduit aussi une connexion métrique D_E sur H telle que, si θ''_E désigne le h-adjoint de θ'_E, on ait $D_V = D_E + \theta_E$.

***Lemme 4.1.4* (*cf.* [21]).** *La donnée d'une variation structure de twisteur polarisée de poids* 0 *sur* X *est équivalente à celle d'un fibré plat* (H, D_V) *muni d'une métrique harmonique* h.

Esquisse de démonstration. Partant d'un fibré harmonique plat (H, D_V, h), on utilise la proposition 2.1.1 pour obtenir $\mathscr{H}'$ avec sa structure de $\mathscr{R}_{\mathscr{X}}$-module donnée par la z-connexion induite par $D'_{\mathscr{H}}$, et on définit $\mathscr{H}''$ de manière similaire. (Voir [**16**, Lemma 2.2.2] pour plus de détails.) □

4.2. $\mathscr{D}$-modules holonomes réguliers avec structure de twisteur polarisée.

Partant d'un objet $\mathscr{T}$ de $\mathscr{R}$- Triples(X) muni d'une dualité hermitienne $\mathscr{S}$ de poids 0, on cherche à donner une définition de positivité. Dans le cas d'un objet lisse, on a pu se restreindre à chaque point de X. En général, il faut utiliser une restriction qui préserve la perversité. C'est le rôle des foncteurs $\psi_{f,\alpha}$ (introduits au § 3.3.d) pour toute fonction f.

Je peux maintenant donner la définition générale, par récurrence sur la dimension d du support :

Définition 4.2.1. La catégorie $\mathrm{MT}^{(\mathrm{r})}_{\leqslant d}(X, w)$ est la sous-catégorie *pleine* de $\mathscr{R}$- Triples(X) pour laquelle les objets sont les triplets $(\mathscr{M}', \mathscr{M}'', C)$ satisfaisant à :

(HSD) $\mathscr{M}', \mathscr{M}''$ sont *holonomes*, *strictement S-décomposables*, et ont un support de dimension $\leqslant d$.

(REG) Pour tout ouvert $U \subset X$ et toute fonction holomorphe $f : U \to \mathbb{C}$, les restrictions $\mathscr{M}'_{|U}, \mathscr{M}''_{|U}$ sont *régulières* le long de $\{f = 0\}$.

($\mathrm{MT}_{>0}$) Pour tout ouvert $U \subset X$ et toute fonction holomorphe $f : U \to \mathbb{C}$, pour tout α avec $\mathrm{Re}(\alpha) \in [-1, 0[$ et tout entier $\ell \geqslant 0$, le triplet

$$\mathrm{gr}^{\mathrm{M}}_{\ell} \Psi_{f,\alpha}(\mathscr{M}', \mathscr{M}'', C) \overset{\text{déf}}{=} \Big(\mathrm{gr}^{\mathrm{M}}_{-\ell} \Psi_{f,\alpha}(\mathscr{M}'), \mathrm{gr}^{\mathrm{M}}_{\ell} \Psi_{f,\alpha}(\mathscr{M}''), \mathrm{gr}^{\mathrm{M}}_{\ell} \Psi_{f,\alpha} C\Big)$$

est un objet de $\mathrm{MT}^{(\mathrm{r})}_{\leqslant d-1}(U, w + \ell)$.

(MT_0) Pour toute composante stricte ponctuelle $\{x_o\}$ de $\mathscr{M}'$ ou $\mathscr{M}''$, on a

$$(\mathscr{M}'_{\{x_o\}}, \mathscr{M}''_{\{x_o\}}, C_{\{x_o\}}) = i_{\{x_o\}+}(\mathscr{H}', \mathscr{H}'', C_o)$$

où $(\mathscr{H}', \mathscr{H}'', C_o)$ est une structure de twisteur ponctuelle de poids w.

Cette définition, qui est un peu calquée sur celle des $\mathscr{D}$-modules de Hodge de M. Saito (*cf.* [**17**]) mérite quelques éclaircissements.

(1) Dire que la sous-catégorie est *pleine*, c'est dire que ses morphismes sont les morphismes dans $\mathscr{R}$- Triples(X), comme définis en 3.3.1.

(2) Dire que $\mathscr{M}$ est strictement S-décomposable signifie d'abord que $\mathscr{M}$ est strictement spécialisable le long de $f = 0$ pour toute fonction analytique f définie localement (*i.e.* $i_{f+\mathscr{M}}$ l'est le long de $t = 0$) ; ensuite, on demande que les morphismes can et var correspondants (on adapte le § 3.2.c aux $\mathscr{R}_{\mathscr{X}}$-modules, avec can $= -\eth_t$, var $= t$) satisfassent à

$$\psi_{t,0} i_{f+}\mathscr{M} = \mathrm{Im}\,\mathrm{can}_f \oplus \ker \mathrm{var}_f ;$$

On peut montrer qu'alors $\mathscr{M}$ se décompose en somme directe de $\mathscr{R}_{\mathscr{X}}$-modules $\mathscr{M}_i$, chacun à support dans un sous-espace analytique fermé irréductible Z_i de X, et chaque $\mathscr{M}_i$ satisfait de plus le fait que, pour tout germe de fonction f, on a soit can_f surjectif, soit var_f injectif.

On peut supposer que les Z_i sont deux à deux distinctes. Alors les modules $\mathscr{M}_i$ sont les composantes strictes de $\mathscr{M}$, et on dit que $\mathscr{M}$ est S(upport)-décomposable. Par définition, cette propriété est satisfaite dans la catégorie MT^r.

(3) Pour être tout à fait précis, il faut définir une petite variante $\Psi_{t,\alpha}$ des foncteurs $\psi_{t,\alpha}$ (lorsque certains α ont une partie imaginaire non nulle). Je ne le ferai pas ici et je renvoie à [**16**, § 3.4] pour plus de détails.

Il faut prendre garde que la non-vacuité de cette catégorie (pour $d \geqslant 1$) n'est pas encore assurée : il n'est pas clair qu'un twisteur lisse les satisfasse, car on demande des conditions pour *toute* fonction f. Malgré cela, on peut montrer :

Proposition 4.2.2. *La catégorie* $\mathrm{MT}^{(\mathrm{r})}_{\leqslant d}(X, w)$ *est abélienne et il n'y a pas de morphisme non trivial (dans* $\mathscr{R}$-$\mathrm{Triples}(X)$*) d'un objet de poids* w *vers un objet de poids* $w' < w$.

On dit qu'un objet $\mathscr{T}$ de $\mathrm{MT}^{(\mathrm{r})}_{\leqslant d}(X, w)$ est polarisable s'il admet une *polarisation* $\mathscr{S}$, c'est-à-dire une dualité hermitienne $\mathscr{S} : \mathscr{T} \to \mathscr{T}^*(-w)$ de poids w telle que :

($\mathrm{MTP}_{>0}$) dans la situation de ($\mathrm{MT}_{>0}$), le morphisme $P\mathrm{gr}^{\mathrm{M}}_{\ell}\Psi_{f,\alpha}\mathscr{S}$ induit une polarisation de $P_{\ell}\Psi_{f,\alpha}\mathscr{T}$;

(MTP_0) dans la situation de (MT_0), on a $\mathscr{S} = i_{\{x_o\}+}\mathscr{S}_o$, où $\mathscr{S}_o$ est une polarisation de la structure de twisteur ponctuelle $(\mathscr{H}', \mathscr{H}'', C_o)$.

On définit ainsi la catégorie $\mathrm{MT}^{(\mathrm{r})}_{\leqslant d}(X, w)^{(\mathrm{p})}$ des objets polarisés.

***Proposition 4.2.3* (semi-simplicité).** *Si* $\mathscr{T}_1$ *est un sous-objet (dans la catégorie* $\mathrm{MT}^{(\mathrm{r})}(X, w)$ *) d'un objet* $\mathscr{T}$ *sous-jacent à un objet polarisé* $(\mathscr{T}, \mathscr{S})$*, alors* $\mathscr{S}$ *induit une polarisation* $\mathscr{S}_1$ *de* $\mathscr{T}_1$ *et* $(\mathscr{T}_1, \mathscr{S}_1)$ *est un facteur direct de* $(\mathscr{T}, \mathscr{S})$ *dans la catégorie* $\mathrm{MT}^{(\mathrm{r})}(X, w)^{(\mathrm{p})}$*. En particulier, la catégorie* $\mathrm{MT}^{(\mathrm{r})}(X, w)^{(\mathrm{p})}$ *est semi-simple (tous les objets sont semi-simples et les morphismes entre objets simples sont soit* 0*, soit des isomorphismes).*

4.3. Les théorèmes

4.3.a. *Le théorème de Simpson sur les courbes.* Le premier résultat, chronologiquement, a été montré par C. Simpson [**19**], pour les courbes. On peut le traduire comme ceci (on se ramène au poids 0 comme à la remarque 4.1.3) :

Théorème 4.3.1. *Si* X *est une surface de Riemann compacte, le foncteur qui, à un objet* $(\mathscr{T}, \mathscr{S})$ *de* $\mathrm{MT}^{(\mathrm{r})}(X, 0)^{(\mathrm{p})}$ *associe le* $\mathscr{D}_X$*-module* $\mathscr{M}''/(z-1)\mathscr{M}''$ *induit une équivalence avec la catégorie des* $\mathscr{D}_X$*-modules holonomes réguliers semi-simples.*

Bien entendu, le cas important est celui où $(\mathscr{T}, \mathscr{S})$ est un objet irréductible, à support non ponctuel. Alors, génériquement sur X, $(\mathscr{T}, \mathscr{S})$ correspond à une variation de structure de twisteur polarisée de poids 0, c'est-à-dire à un fibré plat (H, D_V) avec métrique harmonique h. De plus, la métrique h a un comportement modéré (« tame ») au voisinage des singularités. D'autre part, *via* le foncteur de de Rham, les $\mathscr{D}_X$-modules holonomes réguliers semi-simples sont équivalents aux faisceaux pervers semi-simples sur X.

4.3.b. *Théorèmes pour les $\mathscr{D}$-modules avec structure de twisteur polarisée*

À l'aide de ce résultat, on obtient, à l'aide d'un théorème de type Zariski-Lefschetz de Hamm et Lê D.T. [**7**] :

Corollaire 4.3.2 **(**[**16**, Th. 4.2.12]**).** *Soit X une variété projective lisse sur $\mathbb{C}$. Le foncteur qui, à un objet $(\mathscr{T}, \mathscr{S})$ de* $\mathrm{MT}^{(\mathrm{r})}(X, 0)^{(\mathrm{p})}$ *associe le $\mathscr{D}_X$-module $\mathscr{M}''/(z-1)\mathscr{M}''$ prend ses valeurs dans la catégorie des $\mathscr{D}_X$-modules holonomes réguliers semi-simples (et, composé avec* DR*, dans celle des faisceaux pervers semi-simples sur X).*

La catégorie des $\mathscr{D}$-modules holonomes réguliers avec structure de twisteur polarisée satisfait au théorème de décomposition :

Théorème 4.3.3 **(**[**16**, Th. 6.1.1]**).** *Soit $f : X \to Y$ un morphisme projectif entre variétés projectives lisses sur $\mathbb{C}$ et soit $(\mathscr{T}, \mathscr{S})$ un objet de* $\mathrm{MT}^{(\mathrm{r})}(X, w)^{(\mathrm{p})}$*. Soit c la classe de Chern d'un fibré relativement ample sur X et soit $\mathscr{L}_c$ l'opérateur de Lefschetz correspondant (cup produit avec c). Alors, pour tout j,*

(1) *$f_\dagger^j \mathscr{T}$ est un objet de* $\mathrm{MT}^{(\mathrm{r})}(Y, w+j)$*,*

(2) *le théorème de Lefschetz difficile relatif est satisfait, i.e. pour tout $j \geqslant 0$, $\mathscr{L}_c^j : f_\dagger^{-j}\mathscr{T} \to f_\dagger^j \mathscr{T}$ est un isomorphisme,*

(3) *$f_\dagger^j \mathscr{S}$ induit une polarisation (de la manière usuelle) sur les parties primitives $P f_\dagger^{-j}\mathscr{T} = \ker \mathscr{L}_c^{j+1}$.*

Ce résultat permet de montrer la non-vacuité de la catégorie $\mathrm{MT}^{(\mathrm{r})}(X, 0)^{(\mathrm{p})}$:

Théorème 4.3.4 **(**[**16**, Th. 6.1.3]**).** *Soit X une variété projective lisse sur $\mathbb{C}$ et $(\mathscr{T}, \mathscr{S})$ une variation de structure de twisteur polarisée de poids 0 sur X (correspondant donc à un fibré plat harmonique sans singularité sur X, ou encore à une représentation semi-simple du groupe fondamental de X). Alors $(\mathscr{T}, \mathscr{S})$ est un objet de* $\mathrm{MT}^{(\mathrm{r})}(X, 0)^{(\mathrm{p})}$.

Autrement dit, les propriétés locales ($\mathrm{MT}_{>0}$) et ($\mathrm{MTP}_{>0}$) sur les cycles évanescents sont satisfaites. L'utilisation du théorème de décomposition permet en effet de se ramener, par résolution plongée locale des singularités, à vérifier ces propriétés pour des germes de fonctions monomiales, pour lesquelles un calcul direct (local) est faisable.

4.3.c. *Corollaires locaux.* Bien que les résultats précédents soient de nature globale, on peut aussi obtenir de la même manière des conséquences locales. En effet, si X est un ouvert de $\mathbb{C}^n$, on considère $\mathscr{O}_X$ muni de sa filtration triviale et de sa forme sesquilinéaire k (*cf.* lemme 3.2.1), auquel on associe de manière naturelle un $\mathscr{D}$-module avec structure de twisteur polarisée. Alors la polarisation de la structure de Hodge sur les cycles proches ou évanescents itérés (relativement à plusieurs fonctions $f_1, \ldots, f_p$, de sorte que les faisceaux considérés soient à support ponctuel) s'obtient à partir de k par spécialisation itérée (*cf.* Définition 3.2.6) et opérateur de Weil. On peut[3] ainsi généraliser un résultat de F. Loeser [**12**], qui considère le cas d'une fonction à singularité isolée.

4.3.d. *Les résultats de T. Mochizuki.* Ils consistent en une généralisation des résultats de C. Simpson pour les courbes (et de Corlette dans le cas lisse). Lorsque le diviseur D qui intervient ci-dessous est *lisse*, alors le résultat était dû à O. Biquard [**4**].

Le résultat final peut s'exprimer comme suit :

Théorème 4.3.5. *Le foncteur du corollaire* 4.3.2 *est une équivalence de catégories.*

On peut alors appliquer le théorème de décomposition 4.3.3 pour obtenir une démonstration analytique de la conjecture de Kashiwara pour les faisceaux pervers semi-simples (une démonstration arithmétique avait été obtenue en 2001 par Drinfeld [**6**], modulo une conjecture de de Jong, conjecture montrée en 2003/2004) :

***Corollaire 4.3.6* (Conjecture de Kashiwara [10]).** *Dans la situation du théorème* 4.3.3*, soit $\mathscr{F}$ un faisceau pervers semi-simple sur $\mathscr{X}$. Alors le complexe image directe $\boldsymbol{R}f_*\mathscr{F}$ se décompose en somme directe de ses faisceaux de cohomologie perverse (convenablement décalés), et chaque faisceau de cohomologie perverse est un faisceau pervers semi-simple sur Y.*

On obtient aussi d'autres résultats, concernant les cycles proches/évanescents d'un faisceau pervers semi-simple (*cf.* [**16**] pour plus de détails).

Quelques indications sur la démonstration. Il n'est pas question de résumer ici les deux articles [**13**] et [**14**]. Je vais simplement indiquer la démarche générale.

(1) On se ramène d'abord à montrer que le faisceau pervers associé, par extension minimale, à un système local irréductible sur le complémentaire d'un diviseur à croisement normaux D dans X (*i.e.* le complexe d'intersection) provient d'un objet de $\mathrm{MT}^{(\mathrm{r})}(X,0)^{(\mathrm{p})}$. On utilise pour cela la résolution des singularités et le théorème 4.3.3.

(2) *Passage du global au local.* C'est l'analogue du théorème de Corlette 1.5.1, montrant que la semi-simplicité implique l'existence d'une métrique harmonique. Ici, comme la variété n'est pas compacte, il faut imposer des conditions « à l'infini », c'est-à-dire le long de D, à la métrique : c'est la notion de métrique modérée (« tame »), déjà utilisée par C. Simpson en dimension 1. La difficulté du théorème vient de la non-compacité de $X \smallsetminus D$. La démonstration repose sur des résultats de Jost et Zuo (*cf.* [**14**]).

---

[3] Il faudrait plutôt écrire : « on doit pouvoir... », car ces énoncés ne sont pas encore écrits.

(3) Le problème est maintenant local (sur le diviseur D) : il s'agit de montrer l'équivalence entre fibrés plat avec métrique harmonique modérée, et objets (sans sous-objet ni quotient supporté par D) de la catégorie des $\mathscr{D}$-modules holonomes réguliers avec structure de twisteur polarisée. C'est une démonstration locale, comparable à ce qui est fait par Cattani, Kaplan et Schmid, ou Kashiwara et Kawai, dans le cas des variations de structure de Hodge polarisée, l'analogue à une variable étant essentiellement le théorème de C. Simpson [**19**] (*cf.* aussi [**16**, Chap. 5]).

(4) Après avoir analysé en détail les fibrés plats harmoniques modérés sur $X \smallsetminus D$ au voisinage d'un point de D, il faut vérifier que les propriétés de la définition 4.2.1 (et les propriétés analogue dans le cas polarisé) sont satisfaites. On peut encore, en utilisant le théorème de décomposition 4.3.3 se ramener à vérifier les propriétés de spécialisation le long d'une fonction monomiale où toutes les puissances sont 0 ou 1. Les calculs sont un peu analogues à ceux faits par M. Saito dans [**18**, § 3].

Il faut insister sur le fait que toutes les étapes présentent des difficultés techniques importantes. T. Mochizuki (comme Simpson ou Biquard) travaille avec une structure parabolique le long du diviseur, mais je n'en parle pas car elle n'intervient pas dans la conjecture de Kashiwara.

Références

[1] D. Barlet – « Contribution effective de la monodromie aux développements asymptotiques », *Ann. scient. Éc. Norm. Sup.* 4$^{\text{e}}$ *série* **17** (1984), p. 293–315.

[2] ———, « La forme hermitienne canonique sur la cohomologie de la fibre de Milnor », *Invent. Math.* **81** (1985), p. 115–153.

[3] ———, « Monodromie et pôles de $\int |f|^{2\lambda}$ », *Bull. Soc. math. France* **114** (1986), p. 247–269.

[4] O. Biquard – « Fibrés de Higgs et connexions intégrables : le cas logarithmique (diviseur lisse) », *Ann. scient. Éc. Norm. Sup.* 4$^{\text{e}}$ *série* **30** (1997), p. 41–96.

[5] K. Corlette – « Flat G-bundles with canonical metrics », *J. Differential Geom.* **28** (1988), p. 361–382.

[6] V. Drinfeld – « On a conjecture of Kashiwara », *Math. Res. Lett.* **8** (2001), p. 713–728.

[7] H. Hamm & Lê D.T. – « Lefschetz theorems on quasi-projective varieties », *Bull. Soc. math. France* **113** (1985), p. 123–142.

[8] C. Hertling – « tt^* geometry, Frobenius manifolds, their connections, and the construction for singularities », *J. reine angew. Math.* **555** (2003), p. 77–161.

[9] M. Kashiwara – « Regular holonomic $\mathscr{D}$-modules and distributions on complex manifolds », in *Complex analytic singularities*, Advanced Studies in Pure Math., vol. 8, 1986, p. 199–206.

[10] ———, « Semisimple holonomic $\mathscr{D}$-modules », in *Topological Field Theory, Primitive Forms and Related Topics* (M. Kashiwara, K. Saito, A. Matsuo & I. Satake, éds.), Progress in Math., vol. 160, Birkhäuser, Basel, Boston, 1998, p. 267–271.

[11] M. Kashiwara & P. Schapira – *Sheaves on Manifolds*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, vol. 292, Springer-Verlag, 1990.

[12] F. Loeser – « Quelques conséquences locales de la théorie de Hodge », *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **35** (1985), no. 1, p. 75–92.
[13] T. Mochizuki – « Asymptotic behaviour of tame harmonic bundles and an application to pure twistor D-modules », arXiv : `math.DG/0312230`, 2003.
[14] ______, « A characterization of semisimple local system by tame pure imaginary pluriharmonic metric », arXiv : `math.DG/0402122`, 2004.
[15] C. Sabbah – « Vanishing cycles and Hermitian duality », *Proc. Steklov Inst. Math.* **238** (2002), p. 194–214.
[16] ______, *Polarizable twistor $\mathscr{D}$-modules*, Astérisque, vol. 300, Société Mathématique de France, Paris, 2005.
[17] M. Saito – « Modules de Hodge polarisables », *Publ. RIMS, Kyoto Univ.* **24** (1988), p. 849–995.
[18] ______, « Mixed Hodge Modules », *Publ. RIMS, Kyoto Univ.* **26** (1990), p. 221–333.
[19] C. Simpson – « Harmonic bundles on noncompact curves », *J. Amer. Math. Soc.* **3** (1990), p. 713–770.
[20] ______, « Higgs bundles and local systems », *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* **75** (1992), p. 5–95.
[21] ______, « Mixed twistor structures », Prépublication Université de Toulouse & arXiv : `math.AG/9705006`, 1997.

C. Sabbah, UMR 7640 du CNRS, Centre de Mathématiques Laurent Schwartz, École polytechnique, F–91128 Palaiseau cedex, France • *E-mail :* `sabbah@math.polytechnique.fr`
Url : `http://www.math.polytechnique.fr/cmat/sabbah/sabbah.html`