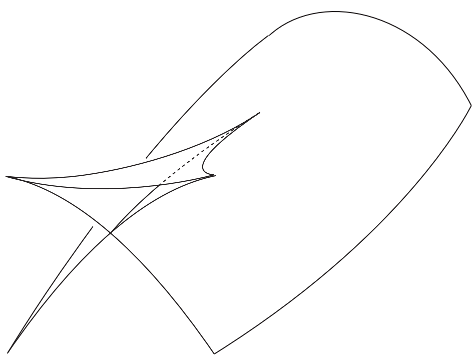
Variétés de Frobenius



Variétés susceptibles de porter une structure de Frobenius

Exemples de type B

Il s'agit essentiellement de variétés de paramètres universels :

espaces de ***modules***, espaces de ***déformations universelles***.

– Le complémentaire des hyperplans diagonaux dans $\mathbf{C}^n$:

c'est l'ensemble des $(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbf{C}^n$ tels que $z_i \neq z_j$ si $i \neq j$.

– $f : \mathbf{C}^{n+1} \longrightarrow \mathbf{C}$ un polynôme à point critique isolé en 0 et $f(0) = 0$.

$$\mu(f, 0) = \dim \mathbf{C}\{u_0, \ldots, u_n\}/(\partial f/\partial u_0, \ldots, \partial f/\partial u_n).$$

Base : $\varphi_0 = 1, \varphi_1, \ldots \varphi_{\mu-1}$.

$M = (\mathbf{C}^\mu, 0)$ muni de coordonnées $z_0, \ldots, z_{\mu-1}$.

Le ***déploiement*** est le polynôme

$$F(u, z) = f(u) + \sum_{j=1}^{\mu} z_j \varphi_j(u).$$

Exemple : $n = 0$ et $f(u) = u^{d+1}$ (singularité A_d), $\mu = d$, $\varphi_j = u^j$.

– Même construction ***globale*** :

$$\mu(f) = \dim \mathrm{C}[u_0, \dots, u_n]/(\partial f/\partial u_0, \dots, \partial f/\partial u_n)$$

si on impose l'absence de singularité du polynôme « à l'infini ».

– On peut aussi considérer une ***variété affine*** plus générale et dessus, une fonction algébrique.

Exemple :

$$f(u) = u_0 + \cdots + u_n \quad \textbf{sur le tore} \quad X = \{u_0 \cdots u_n = 1\} \simeq (\mathrm{C}^*)^n.$$

$$f(u) = u_1 + \cdots + u_n + \frac{1}{u_1 \cdots u_n}.$$

Points critiques : $u_0 = u_1 = \cdots = u_n = \zeta$, avec $\zeta^{n+1} = 1$.

$$\mu(f) = \dim \mathrm{C}[u_1, u_1^{-1}, \dots, u_n, u_n^{-1}]/\big((u_1 - u_0), \dots, (u_n - u_0)\big)$$

Base : $1, u_0, \dots, u_0^n$.

$$F(u, z) = u_1 + \cdots + u_n + z_0 + (1 + z_1)u_0 + z_2 u_0^2 + \cdots + z_n u_0^n.$$

– Les ***espaces de Hurwitz***, qui paramètrent les revêtements ramifiés de $\mathbf{P}^1$, c'est-à-dire les fonctions méromorphes sur une surface de Riemann de genre fixé, dont les ordres des pôles sont aussi fixés.

Exemples de type A. La variété M est un voisinage de l'origine dans l'espace vectoriel $H^*(X, \mathbf{C})$: cohomologie d'une ***variété kählérienne compacte***.

Pourquoi s'intéresser aux structures de Frobenius ?

– Le développement récent de la théorie s'est fait en parallèle avec le développement de la ***symétrie miroir***, qui prend sa source dans des théories de champs en physique.

– Néanmoins, on peut dire que la structure avait été découverte par ***Kyoji Saito*** à la fin des années 70, sur les exemples de type B.

– Une variété projective lisse donne lieu à un objet de type A. Son « miroir » serait un objet de type B donnant la même variété de Frobenius.

– C'est ***B. Dubrovin*** qui a développé la géométrie sous-jacente des variétés de Frobenius.

– Ce type d'approche de la symétrie miroir a été développé par ***A. Givental***.

– Par exemple, dans un article récent, ***S. Barannikov*** associe à l'espace projectif complexe $\mathbf{P}^n$ la fonction $f = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$ sur le tore $X = \{u_0 u_1 \cdots u_n = 1\} \subset \mathbf{C}^{n+1}$.

Approche géométrique

Structure de Frobenius

Deux champs de tenseurs holomorphes sur le fibré tangent TM :

– une forme bilinéaire symétrique g non dégénérée (à valeurs complexes), qu'on appelle encore « ***métrique*** » ;

– un ***produit*** associatif et commutatif $\star$ muni d'un ***champ unité*** e.

Relations

– la « métrique » g est ***plate*** : il existe, localement sur M, des coordonnées $t_1, \ldots, t_n$, telles que les champs $\partial_{t_1}, \ldots, \partial_{t_n}$ forment une base g-orthonormée. L'unique connexion ***sans torsion*** $\bigtriangledown$ associée à la métrique, *i.e.* telle que

$$dg(\xi_1, \xi_2) = g(\bigtriangledown\xi_1, \xi_2) = g(\xi_1, \bigtriangledown\xi_2)$$

pour tous champs de vecteurs ξ_1, ξ_2, est donc aussi ***sans courbure***.

– Le champ unité est ***horizontal*** pour $\bigtriangledown$: $\bigtriangledown e = 0$.

– Le produit est ***auto-adjoint*** relativement à g, c'est-à-dire que, pour tous champs de vecteurs ξ_1, ξ_2, ξ_3, on a

$$g(\xi_1 \star \xi_2, \xi_3) = g(\xi_1, \xi_2 \star \xi_3) \overset{\text{déf}}{=} c(\xi_1, \xi_2, \xi_3).$$

– Le 4-tenseur $\bigtriangledown c$ est ***symétrique*** en ses quatre arguments.

Écriture dans des coordonnées plates

$(t_1, \ldots, t_n)$ des coordonnées locales telles que $\partial_{t_1}, \ldots, \partial_{t_n}$ soient g-orthonormés.

$$\partial_{t_j} \star \partial_{t_k} = \sum_i C^{(i)}_{j,k}\, \partial_{t_i}.$$

Condition de symétrie sur c :

la fonction $\dfrac{\partial C^{(i)}_{j,k}}{\partial t_\ell}$ **est symétrique en** i, j, k, ℓ.

Conditions d'homogénéité

Il existe un champ de vecteurs $\mathfrak{E}$ (champ d'Euler) et un nombre complexe D soumis aux conditions suivantes :

– l'endomorphisme $\bigtriangledown\mathfrak{E}$ de Θ_M est une section $\bigtriangledown$-horizontale de $\mathbf{End}_{\mathcal{O}_M}(\Theta_M)$;

– on a $\mathcal{L}_{\mathfrak{E}}(g(\xi,\eta)) - g(\mathcal{L}_{\mathfrak{E}}\xi,\eta) - g(\xi,\mathcal{L}_{\mathfrak{E}}\eta) = D\cdot g(\xi,\eta)$ pour tous champs ξ,η ; autrement dit,

$$\boxed{\mathcal{L}_{\mathfrak{E}}(g) = D\cdot g}$$

– on a $\mathcal{L}_{\mathfrak{E}}(\xi\star\eta) - \mathcal{L}_{\mathfrak{E}}\xi\star\eta - \xi\star\mathcal{L}_{\mathfrak{E}}\eta = \xi\star\eta$ pour tous champs ξ,η ; autrement dit,

$$\boxed{\mathcal{L}_{\mathfrak{E}}(\star) = \star}$$

Pourquoi attribuer ces structures à Frobenius ?

– Dérivation des fonctions elliptiques par rapport aux périodes de la courbe elliptique.
  Connexion « de ***Gauss-Manin*** » sur l'espace des modules des courbes elliptiques.
– Notion d'***algèbre de Frobenius*** introduite dans la théorie des représentations des groupes finis (algèbre $\mathbf{C}[G]$). Sur les variétés de Frobenius, chaque espace tangent est une algèbre de Frobenius associative et commutative.

Approche potentielle

Dans des coordonnées plates $(t_1, \ldots, t_n)$, la condition de symétrie sur c équivaut à l'existence d'une fonction $F(t_1, \ldots, t_n)$, appelée ***potentiel de Gromov-Witten*** de la structure, telle que

$$\frac{\partial^3 F}{\partial t_i \partial t_j \partial t_k} = c(\partial_{t_i}, \partial_{t_j}, \partial_{t_k}) \quad \textbf{pour tous } i, j, k.$$

Réciproquement,

le tenseur c défini par une fonction $F(t_1, \ldots, t_n)$ provient d'une structure de Frobenius seulement si la fonction F satisfait aux ***équations d'associativité*** :

$$\textbf{l'expression} \quad \boxed{\sum_m \frac{\partial^3 F}{\partial t_i \partial t_j \partial t_m} \cdot \frac{\partial^3 F}{\partial t_m \partial t_k \partial t_\ell}} \quad \textbf{est } \textbf{\textit{symétrique}} \textbf{ en } i, j, k, \ell.$$

Conditions d'homogénéité sur le potentiel

On suppose que l'endomorphisme

$$\begin{aligned} \nabla\mathfrak{E} : \Theta_M &\longrightarrow \Theta_M \\ \xi &\longmapsto \nabla_\xi \mathfrak{E} \end{aligned}$$

est ***semi-simple*** et on choisit des coordonnées plates telles que

$$\partial_{t_1} = e, \quad \nabla_{\partial_{t_i}} \mathfrak{E} = \delta_i \mathfrak{E}.$$

La condition d'homogénéité s'exprime par

$$\mathcal{L}_{\mathfrak{E}}(F) \equiv (D+1)F \quad \textbf{modulo un polynôme de degré } \leqslant 2,$$

c'est-à-dire que les seuls monômes $t_1^{a_1} \cdots t_n^{a_n}$ intervenant dans le développement de F sont ceux pour lesquels $\sum_j a_j \delta_j = D + 1$ si $\sum_j a_j \geqslant 3$.

Exemple : la cohomologie quantique

Cohomologie quantique d'une variété projective lisse X :

– $M = (H^*(X, \mathbb{C}), 0), TM = M \times H^*(X, \mathbb{C})$,

– pour tout $m \in M$, un produit $\star_m$ sur $T_m M = H^*(X, \mathbb{C})$ avec $\star_0 =$ cup-produit.

– La dualité de Poincaré définit une forme bilinéaire sur TM (« métrique »).

– Le produit $\star$ est défini par l'intermédiaire du ***potentiel de Gromov-Witten***.

– Les coefficients du développement du potentiel de Gromov-Witten dans des coordonnées plates sont calculés *via* les ***espaces de modules d'applications stables*** de $\mathbb{P}^1$ marqué de points vers X.

– Les ***équations d'associativité*** reflètent les relations géométriques liant ces espaces de modules (en fonction du nombre de points marqués).

Approche « isomonodromique »

– $\Phi : \Theta_M \longrightarrow \Theta_M \otimes \Omega^1_M$ correspondant au produit $\star$;

– $R_0 : \Theta_M \longrightarrow \Theta_M, \xi \longmapsto \mathfrak{E} \star \xi$;

– $R_\infty : \Theta_M \longrightarrow \Theta_M, \xi \longmapsto \nabla_\xi \mathfrak{E}$.

– Nouvelle coordonnée $\tau \in \mathbb{C}$.

– $\pi : M \times \mathbb{C} \longrightarrow M$ la projection.

Relation de compatibilité

Sur $\pi^* TM$ (fibré sur $M \times \mathbb{C}$), la connexion

$$\boldsymbol{\nabla} = \pi^* \nabla + \frac{\pi^*\Phi}{\tau} + \left(\frac{R_0}{\tau} - R_\infty\right)\frac{d\tau}{\tau}$$

est ***intégrable***, c'est-à-dire ***sans courbure***.

Exemple 1 : Structures de Frobenius semi-simples

***Théorème* (Dubrovin)**

Il y a correspondance bijective entre ***variétés de Frobenius simplement connexes semi-simples*** *(i.e. pour lesquelles R_0 est semi-simple régulier en tout point) et les quadruplets $(B_0^o, B_\infty, \omega^o, U)$, où*

– B_0^o *est une matrice semi-simple régulière,*

– B_∞ *satisfait à $B_\infty^* + B_\infty = w\,\mathrm{Id}$ avec $w \in \mathbf{Z}$,*

– ω^o *est un vecteur propre de B_∞ dont aucune des composante sur la base propre de B_0^o n'est nulle et*

– U *est un ouvert (étale) simplement connexe de $\widetilde{X}_d \smallsetminus \Theta_{\omega^o}$.*

– $\widetilde{X}_d$: revêtement universel de $\mathbf{C}^d \smallsetminus$ **diagonales**

– Θ_{ω^o} : hypersurface de $\widetilde{X}_d$ dépendant de la condition initiale $(B_0^o, B_\infty, \omega^o)$.

Exemple 2 : Structures de Frobenius et singularités

– $f(u_0, \ldots, u_n) : (\mathbb{C}^{n+1}, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}, 0)$ à point critique isolé,
$M = (\mathbb{C}^\mu, 0)$, $F(u, z) = f(u) + z_0 + \sum_{i=1}^{\mu-1} \varphi_i(u) z_i$.
– ***Application de Kodaira-Spencer*** $\longrightarrow$ structure multiplicative sur Θ_M :

$$\begin{aligned} \varphi : \Theta_M &\longrightarrow \mathcal{O}_{M\times\mathbb{C}^{n+1}}\big/(\partial F/\partial u_0, \ldots, \partial F/\partial u_n) \\ \partial_{z_i} &\longmapsto [\partial F/\partial z_i] \end{aligned}$$

– ***Champ d'Euler*** : $\mathfrak{E} = \varphi^{-1}([F])$
– Fibré de ***Gauss-Manin*** : fibré à connexion plate.

Théorème* (M. Saito)**. *Il existe une section du fibré de Gauss-Manin :* ***forme primitive*, qui identifie le fibré de Gauss-Manin et le fibré tangent* TM *et munit celui-ci d'une « métrique » et d'une connexion plate sans torsion (****connexion de Gauss-Manin****). On en déduit une* ***structure de Frobenius*** *sur* M.

Approche par les algèbres différentielles de Gerstenhaber

$(\mathcal{A}, \wedge, \delta, \Delta)$

– $(\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 \oplus \mathcal{A}_1, \wedge)$ une algèbre $\mathbf{Z}_2$-graduée commutative sur un corps k.

– $\delta, \Delta : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ k-linéaires impaires, telles que

  – $\delta^2 = 0$, $\Delta^2 = 0$, $\delta\Delta + \Delta\delta = 0$,

  – δ est une dérivation,

  – pour tout $a \in \mathcal{A}$,

$$b \longmapsto [a \bullet b] \overset{\text{déf}}{=} \Delta(a \wedge b) - \Delta a \wedge b - (-1)^{\deg a} a \wedge \Delta b$$

  est une dérivation de degré $1 + \deg a$.

Théorème **(Barannikov-Kontsevitch, Manin)**

Si $(\mathcal{A}, \wedge, \delta, \Delta)$ *est une algèbre différentielle de Gerstenhaber telle que*

– $\dim_k H(\mathcal{A}, \delta) < +\infty$,

– *il existe une forme* k*-linéaire* $\int : \mathcal{A} \longrightarrow k$ *telle que*

$$\int (\delta a) \wedge b = (-1)^{1+\deg a} \int a \wedge (\delta b)$$

et idem pour Δ*, induisant une forme bilinéaire* $(a, b) = \int a \wedge b$ ***non dégénérée*** *sur* $H(\mathcal{A}, \delta)$,

– $H^*(\mathrm{Ker}\,\Delta, \delta) \xrightarrow{\sim} H^*(\mathcal{A}, \delta)$ *et* $H^*(\mathrm{Ker}\,\Delta, \delta) \xrightarrow{\sim} H^*(\mathcal{A}, \delta)$.

Alors on peut munir $M =$ *germe de* $H(\mathcal{A}, \delta)^*$ *en* 0 *d'une structure de Frobenius.*

Application

X variété ***kählérienne compacte***, $(\mathcal{A}, \wedge) = (\mathcal{E}^\bullet(X), \wedge)$, $\delta = d''$, $\Delta = d'^*$,

$M =$ voisinage de 0 dans le dual de $H^*(X, \mathrm{C}) = H^*_{d''}(X, \mathrm{C})$.

Le spectre d'une variété de Frobenius

– Un des invariants numériques associés à une variété de Frobenius est la constante d'homogénéité D.

– Le champ d'Euler $\mathfrak{E}$ sur la variété de Frobenius M satisfait

$$\nabla \mathfrak{E} \in \mathrm{End}(\Theta_M) \quad \textbf{est } \nabla\textbf{-horizontal.}$$

Si cet endomorphisme est ***semi-simple*** dans chaque fibre de TM, l'ensemble de ses valeurs propres est indépendant de la fibre :
c'est le ***spectre de la variété de Frobenius***.

Exemples

– Structure universelle associée à $(B_0^o, B_\infty, \omega^o, U)$ avec $B_\infty + B_\infty^* = w\,\mathrm{Id}$ et $B_\infty \omega^o = q\omega^o$,

$$D = 2q + 2 - w \quad \text{et} \quad \mathrm{Spectre} = \mathrm{Spectre}(-B_\infty + (1+q)\,\mathrm{Id}).$$

– $\mathrm{Spectre}(A_d) = \left\{\frac{1}{d+1}, \ldots, \frac{d}{d+1}\right\}, \quad D = \frac{d+3}{d+1}.$

– Dans la construction de ***Barannikov-Kontsevitch***, D est la dimension de la variété X et le spectre est formé d'entiers.