Equations aux différences finies provenant de la géométrie algébrique

Claude Sabbah

Lille, 25 mars 1997

Introduction

Au cours des années 80, beaucoup de travux se sont développés autour des fonctions hypergéométriques, notamment à la recherche de généralisations intéressantes (Varchenko, Gelfand-Kapranov-Zelevinsky, Dwork, *etc.*).

Une fonction hypergéométrique d'une variable est une fonction telle que sa transformée de Mellin satisfait un système linéaire **de rang** 1 d'équations aux différences.

La géométrie algébrique permet de produire des systèmes d'équations aux différences de plusieurs variables (cohomologie du complexe d'Aomoto) qui possèdent des propriétés intéressantes, mais ceux-ci ne sont pas en général de rang 1.

On obtient un système de rang 1 en prenant un déterminant des précédents : les solutions de ce système sont des déterminants de matrices de périodes.

Parallèlement, cette démarche a été étendue à d'autres objets que les fonctions, ainsi qu'à des situations de caractéristique p (Katz, Dwork, Loeser) : notamment les faisceaux pervers et les $\mathcal{D}$-modules holonomes.

1. Systèmes holonomes d'EDF

Soit $\mathbf{C}(s)$ le corps des fractions rationnelles à p variables $s = (s_1, \ldots, s_p)$. Un *système rationnel holonome d'équations aux différences finies* (EDF) $\mathfrak{M}$ est par définition un $\mathbf{C}(s)$-espace vectoriel de dimension finie r muni d'opérateurs de translation inversibles $\tau_1, \ldots, \tau_p$ qui commutent, qui sont $\mathbf{C}$-linéaires et qui satisfont les relations de commutation

$$\begin{array}{rcll} \tau_i \cdot s_j & = & s_j \cdot \tau_i & \text{si } i \neq j \\ \tau_i \cdot s_i & = & (s_i + 1) \cdot \tau_i & \forall i = 1, \ldots, p. \end{array}$$

Soit $\boldsymbol{m}$ une $\mathbf{C}(s)$-base de $\mathfrak{M}$ et $A_i(s) \in \mathrm{GL}(r, \mathbf{C}(s))$ la matrice de τ_i dans cette base. La commutation des τ_i s'exprime par la relation

$$A_i(s + \mathbf{1}_j) \cdot A_j(s) \;=\; A_j(s + \mathbf{1}_i) \cdot A_i(s) \tag{1}$$

pour tous $i, j = 1, \ldots, p$, où $\mathbf{1}_i$ désigne le $i^{\text{ème}}$ vecteur de la base naturelle de $\mathbf{C}^p$. Le fait que τ_i soit inversible signifie que A_i est inversible et la matrice de τ_i^{-1} dans la base $\boldsymbol{m}$ est égale à

$$A_i(s - \mathbf{1}_i)^{-1}.$$

Si $\boldsymbol{m'} = B(s) \cdot \boldsymbol{m}$ est une autre base, avec $B(s) \in \mathrm{GL}(r, \mathbf{C}(s))$ (on écrit ici la base en colonne), la matrice $A'_i(s)$ de τ_i dans la base $\boldsymbol{m'}$ est donnée par

$$A'_i(s) \;=\; B(s + \mathbf{1}_i) \cdot A_i(s) \cdot B(s)^{-1}. \tag{2}$$

L'ensemble des classes d'isomorphisme de systèmes holonomes d'EDF de dimension r est donc le quotient de l'ensemble des $(A_1, \ldots, A_p) \in \mathrm{GL}(r, \mathbf{C}(s))^p$ satisfaisant la relation de commutation (**??**) modulo la relation de cobord (**??**).

Une solution méromorphe de $\mathfrak{M}$ est un homomorphisme $\mathbf{C}(s)\langle\tau, \tau^{-1}\rangle$-linéaire de $\mathfrak{M}$ dans l'espace $\mathrm{Mer}(\mathbf{C}^p)$ des fonctions méromorphes sur $\mathbf{C}^p$ (ce dernier est naturellement muni d'une structure de module à gauche sur l'anneau des opérateurs aux différences $\mathbf{C}(s)\langle\tau, \tau^{-1}\rangle$). Si on choisit une base $\boldsymbol{m}$ de $\mathfrak{M}$, l'image de cette base par une solution est un r-vecteur $(\varphi_1, \ldots, \varphi_r)$ de fonctions méromorphes qui satisfait le système

$$\begin{bmatrix} \varphi_1(s + \mathbf{1}_i) \\ \vdots \\ \varphi_r(s + \mathbf{1}_i) \end{bmatrix} = A_i(s) \cdot \begin{bmatrix} \varphi_1(s) \\ \vdots \\ \varphi_r(s) \end{bmatrix}.$$

Si $B(s) \in \mathrm{GL}(r, \mathbf{C}(s))$, le r-vecteur

$$B(s) \cdot \begin{bmatrix} \varphi_1(s) \\ \vdots \\ \varphi_r(s) \end{bmatrix}$$

est alors solution d'un système équivalent au précédent.

Les systèmes holonomes d'EDF généralisent les relations de contiguité satisfaites par les fonctions hypergéométriques classiques. Pour celles-ci, le système d'EDF est de dimension 1 sur $\mathbf{C}(s)$. La structure d'un tel système est alors simple :

THÉORÈME (Ore, 1930). — *Tout système d'EDF de dimension* 1 *est isomorphe au système satisfait par une fonction*

$$c_1^{s_1} \cdots c_p^{s_p} \cdot \prod_L \prod_\alpha \Gamma(L(s) - \alpha)^{\gamma_{L,\alpha}}$$

où L parcourt un ensemble fini de formes linéaires à coefficients dans $\mathbf{Z}$ premiers entre eux et α un ensemble fini de nombres complexes, $c_1, \ldots, c_p \in \mathbf{C}^*$ et $\gamma_{L,\alpha} \in \mathbf{Z}$.

Remarque. — Si on change un α en $\alpha + k$ avec $k \in \mathbf{Z}$, la fonction obtenue satisfait un système équivalent au précédent. De même, on peut changer L en $-L$ et faire sortir ainsi des facteurs $(-1)^{s_j}$. Il faut donc choisir des normalisations pour que la classe d'isomorphisme du système corresponde à une unique fonction. Un choix possible est de prendre les α de partie réelle dans $[0, 1[$, mais, comme nous le verrons plus loin, ce n'est pas nécessairement le mieux adapté au problème considéré.

Ce résultat peut être généralisé pour tout système holonome d'EDF :

THÉORÈME (C.S. 1992). — *Soit $\mathfrak{M}$ un système rationnel holonome d'équations aux différences finies. Il existe une base $\boldsymbol{m}$ de $\mathfrak{M}$ dans laquelle pour tout $i = 1, \ldots, p$ la matrice de τ_i et celle de τ_i^{-1} ont pour pôles une réunion d'hyperplans d'équation $L(s) - \alpha = 0$ où L parcourt un ensemble fini de formes linéaires à coefficients dans $\mathbf{Z}$ premiers entre eux et α un ensemble fini de nombres complexes.*

La démonstration de ce théorème se fait en plusieurs temps. On considère un système algébrique holonome $\mathfrak{N}$ d'EDF (défini sur l'anneau $\mathbf{C}[s]\langle\tau, \tau^{-1}\rangle$) tel que

$$\mathfrak{M} = \mathbf{C}(s) \otimes_{\mathbf{C}[s]} \mathfrak{N}.$$

On montre qu'après localisation hors d'une réunion d'hyperplans du type voulu le module

$$\mathfrak{N}_{\mathrm{loc}} \overset{\text{déf}}{=} \mathbf{C}[s]_{\mathrm{loc}} \otimes_{\mathbf{C}[s]} \mathfrak{N}$$

est de type fini et projectif sur $\mathbf{C}[s]_{\mathrm{loc}}$ (qui désigne l'anneau localisé considéré). On utilise ici les techniques développées à propos des **polynômes de Bernstein à plusieurs variables**.

Si l'on appelle **lieu singulier de $\mathfrak{N}$** l'ensemble des points de $\mathbf{C}^p$ au voisinage desquels $\mathfrak{N}$ n'est pas localement libre, ce résultat signifie que le lieu singulier de $\mathfrak{N}$ est une réunion d'hyperplans comme ci-dessus.

On montre que, quitte à localiser encore, ce module est libre en utilisant de plus le théorème de Quillen-Souslin.

2. Le complexe d'Aomoto

Soit U une variété affine (par exemple un ouvert affine de $\mathbf{C}^n$) et $f = (f_1, \dots, f_p)$ une application régulière de U dans $(\mathbf{C}^*)^p$ (autrement dit on suppose que les fonctions f_i ne s'annulent pas sur U). La construction suivante a été considérée par Bernstein et Aomoto au début 70. C'est un analogue "aux différences" de la construction du système différentiel de Gauss-Manin. On considère le complexe

$$0 \to \mathcal{O}(U) \otimes_{\mathbf{C}} \mathbf{C}(s) \xrightarrow{d_s} \Omega^1(U) \otimes_{\mathbf{C}} \mathbf{C}(s) \xrightarrow{d_s} \cdots \xrightarrow{d_s} \Omega^{\dim U}(U) \otimes_{\mathbf{C}} \mathbf{C}(s) \to 0$$

où $\Omega^k(U)$ est l'espace des formes différentielles régulières sur U : par exemple, si les f_j sont des polynômes sur $\mathbf{C}^n$ et $U = \mathbf{C}^n - \{\prod_{j=1}^p f_j = 0\}$, ce sont les formes différentielles rationnelles sur $\mathbf{C}^n$ à pôles le long de $\prod_{j=1}^p f_j = 0$.

La différentielle d_s est $f^{-s} \circ d \circ f^s$, où d est la différentielle usuelle (indépendante de s) et $f^s = f_1^{s_1} \cdots f_p^{s_p}$. Ainsi

$$d_s(\omega \otimes 1) \;=\; d\omega \otimes 1 + \sum_{j=1}^{p} \frac{df_j}{f_j} \wedge \omega \otimes s_j$$

On a clairement $d_s \circ d_s = 0$. On pose

$$\tau_j(\omega \otimes \varphi(s)) \;\stackrel{\text{déf}}{=}\; f_j \omega \otimes \varphi(s + \mathbf{1}_j).$$

Les opérateurs τ_j commutent à d_s. Chaque groupe de cohomologie $\mathcal{H}^k$ de ce complexe est ainsi un $\mathbf{C}(s)$-espace vectoriel de dimension finie (Bernstein) munie d'opérateurs de translation inversibles qui commutent, autrement dit est **un système rationnel d'EDF**.

Les solutions du système $\mathcal{H}^n$ pour $n = \dim U$ peuvent s'écrire sous forme intégrale $\int f_1^{s^1} \cdots f_p^{s^p} \omega$, si ω est une n-forme différentielle rationnelle.

Remarque. — On peut aussi considérer un complexe d'Aomoto tordu par une exponentielle : la différentielle est $d_{s,g} = (e^{-g} f^{-s}) \circ d \circ (f^s e^g)$, où g est un polynôme.

3. Exemples

Il est plus simple de commencer par des exemples où le complexe d'Aomoto n'a qu'**un seul groupe de cohomologie**, celui-ci en dimension $\dim U$.

Exemple 1. Les fonctions $f_1, \dots, f_p$ sont des formes affines sur $\mathbf{C}^n$ et U est le complémentaire des hyperplans qu'elles définissent.

Exemple 2. Ici on prend $p = 1$, $f : \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}$ est un polynôme dont tous les points critiques sont isolés et qui "n'a pas de point critique à l'infini". L'ouvert U est le complémentaire de $f = 0$ dans $\mathbf{C}^n$.

Dans ces deux exemples, le complexe d'Aomoto n'a de cohomologie qu'en degré n.

Dans l'exemple 1, la dimension du $\mathcal{H}^n$ est égale à la caractéristique d'Euler-Poincaré de U. Si par exemple tous les f_j sont à coefficients réels, c'est aussi le nombre de **composantes connexes bornées** du complémentaire de l'arrangement dans $\mathbf{R}^n$.

Dans l'exemple 2, si on suppose de plus que la fibre $f^{-1}(0)$ est lisse (*i.e.* ne contient pas de point critique du polynôme), la dimension est égale à la somme des **nombres de Milnor** en chaque point critique de f (ceux-ci sont en nombre fini).

4. Le déterminant

Si $\mathfrak{M}$ est un système rationnel d'EDF, on lui associe un système de rang 1, à savoir son **déterminant** : comme $\mathbf{C}(s)$-espace vectoriel, c'est le produit extérieur maximal; si $m_1, \ldots, m_\mu$ est une base de $\mathfrak{M}$ et $A_i(s)$ est la matrice de τ_i dans cette base, la “matrice” de τ_i dans la base $m_1 \wedge \cdots \wedge m_\mu$ de $\operatorname{d\acute{e}t} \mathfrak{M}$ est $\operatorname{d\acute{e}t} A_i$. On peut décrire ce système de rang 1 par une de ses solutions comme dans le théorème de Ore.

Problème. Dans le cas du complexe d'Aomoto associé à $f_1, \ldots, f_p$ (et en supposant par exemple que ce complexe n'a de cohomologie qu'en degré n), expliciter les $c_1, \ldots, c_p$ et les L, α qui interviennent dans le produit de facteurs Γ en fonction de la topologie de l'application $(f_1, \ldots, f_p)$.

La solution de ce problème pour les c_j est très simple : chaque c_j ne dépend que du f_j correspondant : c_j est le produit des $v_k^{\chi_k}$, où v_k parcourt l'ensemble (fini) des valeurs critiques de f_j et χ_k est la caractéristique d'Euler évanescente de f_j en cette valeur critique, *i.e.* la différence des caractéristiques d'Euler $\chi(f_j^{-1}(v_k)) - \chi(f_j^{-1}(t))$ si t est une valeur régulière de f_j.

Pour les L, α, la situation est plus compliquée, mais quand même descriptible (Loeser-C.S.). Commençons par le cas $p = 1$, de sorte que $L(s) = s$. Il s'agit de déterminer les α.

On suppose pour simplifier que f est comme dans l'exemple 2. Si $\Delta_0(T) = \prod (T - \lambda)^{\gamma_\lambda}$ désigne le polynôme caratéristique de la monodromie autour de $f = 0$ sur $H^{n-1}(f^{-1}(t))$, on pose

$$\Delta_0^{\log}(s) \overset{\text{déf}}{=} \prod \left(s - \frac{1}{2i\pi} \log \lambda \right)^{\gamma_\lambda}.$$

Ici, le choix de la détermination du log importe peu. On définit de la même manière $\Delta_\infty^{\log}(s)$ en considérant la monodromie sur un cercle de rayon très grand (autour de $f = \infty$). Alors, la matrice de τ sur $\operatorname{d\acute{e}t} \mathcal{H}^n$ est

$$(-1)^n c(f) \cdot \frac{\Delta_0^{\log}(s)}{\Delta_\infty^{\log}(-s)}.$$

On a une formule analogue (mais plus compliquée) dans le cas général : les α sont des logarithmes de certaines monodromies.

5. Bonnes bases

5.1. Arrangements d'hyperplans.

Varchenko puis Douai-Terao ont décrit, dans le cas d'un arrangement d'hyperplans réels $f_1, \ldots, f_p$, une famille de n-formes différentielles $\omega_1, \ldots, \omega_\mu$ construites par un procédé combinatoire à partir des formes $s_j \dfrac{df_j}{f_j}$, et ont donné une expression explicite pour le déterminant de la matrice dont les termes sont les $\int_{\Delta_j} f_1^{s^1} \cdots f_p^{s^p} \omega_i$ $(i, j = 1, \ldots, \mu)$, où Δ_j sont les composantes bornées de $\mathbf{R}^n - \{\prod f_j = 0\}$. Ils ont ainsi précisé les décalages entiers qui interviennent dans les facteurs Γ.

Cette construction repose sur la combinatoire de l'arrangement.

5.2. Le cas d'un polynôme.

Soit f un polynôme comme dans l'exemple 2 et soit $\mu = \sum \mu_k$ la somme des nombres de Milnor des points critiques $x^{(k)}$ de f. Le **spectre à l'infini** de ce polynôme est une famille $\alpha_1, \ldots, \alpha_\mu$ de nombres rationnels, telle que les $\exp -2i\pi\alpha_k$ soient les valeurs propre de la monodromie de f sur $H^{n-1}(f^{-1}(t))$ quand t parcourt un cercle de rayon $\gg 0$.

On considère le quotient $\mathbf{C}[x_1, \ldots, x_n]/(\partial f/\partial x_1, \ldots, \partial f/\partial x_n)$. C'est un espace vectoriel de dimension finie μ sur $\mathbf{C}$. Sur ce quotient est définie une filtration croissante indexée par un nombre fini de rationnels. Les sauts de cette filtration donnent le spectre, avec pour multiplicité la dimension du gradué correspondant.

Le spectre est un ensemble de μ rationnels (éventuellement égaux) qui sont > 0. De plus, il est symétrique relativement à $n/2$.

Exemple. Si f est homogène de degré d, la filtration est induite, à une normalisation près des indices, par la filtration par le degré sur l'anneau des polynômes (on fait en sorte que f ait pour degré 1). Dans beaucoup de situations, on peut définir cette filtration à partir d'une filtration de l'anneau des polynômes, définie à l'aide du polyèdre de Newton attaché à f et telle que f ait le degré 1.

Théorème. — *Soit f un polynôme comme ci-dessus, tel que* 0 *ne soit pas* *valeur critique. Il existe une famille $\omega_1, \ldots, \omega_\mu$ de formes différentielles induisant une base de*

$$\frac{\mathbf{C}[x_1, \ldots, x_n]}{(\partial f/\partial x_1, \ldots, \partial f/\partial x_n)} \cdot dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$$

ainsi qu'une base de $\mathcal{H}^n$, telle que la matrice de τ dans cette base ait la forme

$$(s+1)\,(A_1 + (s+1)\,\mathrm{Id})^{-1}\,A_0$$

où A_1 est la matrice diagonale ayant pour valeurs propres le spectre à l'infini de f, et A_0 est une matrice à coefficients dans $\mathbf{C}$: c'est la matrice de la multiplication par f sur le quotient jacobien dans la base induite par $\omega_1, \ldots, \omega_\mu$.

Remarques.

1. La construction explicite d'une telle base n'est pas évidente, même dans des situations assez simples. Je ne connais pas pour l'instant d'algorithme de construction.

2. Ce résultat donne une solution à un analogue du *problème de Birkhoff* pour les équations aux différences. Il est en fait obtenu à partir d'une solution au problème de Birkhoff pour une équation différentielle, à savoir le système de Gauss-Manin attaché au polynôme f. On l'obtient par **transformation de Mellin formelle**.

3. Dans la base $\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_\mu$ de dét $\mathcal{H}^n$, la "matrice" de τ est

$$c \cdot \frac{(s+1)^\mu}{\prod_{\alpha \in \text{spectre } f} (s+1+\alpha)}$$

   où $c = \prod f(x^{(k)})^{\mu_k}$, produit pris sur les points critiques $x^{(k)}$ de f, et μ_k est le nombre de Milnor de f en un tel point.

4. La démonstration de ce résultat utilise une étude fine de la **variation de structure de Hodge mixte** sur $H^{n-1}(f^{-1}(t), \mathbf{Q})$ et sa limite quand $t \to \infty$.