VARIÉTÉS DE FROBENIUS

Claude Sabbah

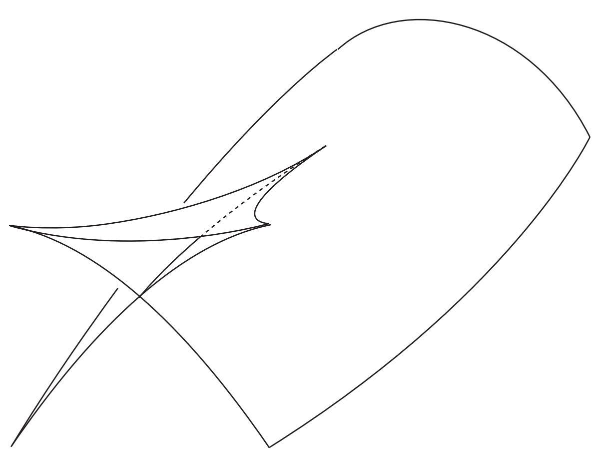
Table des matières

1. Qu'est-ce qu'une structure de Frobenius sur une variété ?

Bien que la théorie puisse se faire sur les variétés C^∞, les exemples naturels qui portent une structure de Frobenius sont des variétés analytiques complexes. Elles sont *non compactes*.

Exemples de type B. Il y a un certain nombre d'exemples classiques.

– Le complémentaire des hyperplans diagonaux dans $\mathbf{C}^n$:
  c'est l'ensemble des $(z_1, \dots, z_n) \in \mathbf{C}^n$ tels que $z_i \neq z_j$ si $i \neq j$.
– Le complémentaire, dans $\mathbf{C}^3$, de la complexifiée de la figure suivante :



– Plus généralement, le complémentaire du *discriminant* d'un polynôme de degré $d+1$ à coefficients indéterminés. Par exemple, pour $d=3$ et si on impose que la somme des racines soit nulle, on obtient

$$\operatorname{discr}\big(u^4+z_2u^2+z_1u+z_0\big)=256z_0^3-27z_1^4+16z_0z_2^3-4z_1^2z_2^3-128z_0^2z_2^2+144z_0z_1^2z_2.$$

Exemples de type A. Il y a d'autres exemples moins classiques : c'est le cas où la variété est un voisinage (formel) de l'origine dans $H^*(X,\mathbf{C})$, si X est une variété projective lisse (Barannikov-Kontsevitch).

Une *structure de Frobenius* consiste en la donnée de deux systèmes de coordonnées sur la variété :
– Un système de *coordonnées plates*,
– Un système de *coordonnées canoniques*.

En général, on a accès facilement à l'un des systèmes de coordonnées, l'autre est caché. De fait, les formules de changement de coordonnées font en général intervenir des fonctions très transcendantes.

Dans les premiers exemples (type B), ce sont les coordonnées canoniques qui sont faciles d'accès (ce sont les valeurs critiques du polynôme f) et les coordonnées plates sont cachées (mais sur cet exemple elles s'expriment par des formules calculables).

Dans les exemples de type A (« cohomologie quantique »), ce sont les coordonnées plates qui s'obtiennent facilement, tandis que les coordonnées canoniques sont bien cachées (les définir revient à définir un *produit quantique* sur la cohomologie, déformation du cup-produit).

Une structure de Frobenius sur une variété analytique complexe M consiste en la donnée de deux champs de tenseurs holomorphes sur le fibré tangent TM :
– une forme bilinéaire symétrique g non dégénérée (à valeurs complexes), qu'on appelle encore « métrique » ;
– un *produit* associatif et commutatif $\star$ muni d'un *champ unité* e.

Relations
– la « métrique » g est *plate* : il existe, localement sur M, des coordonnées $t_1,\dots,t_n$, telles que les champs $\partial_{t_1},\dots,\partial_{t_n}$ forment une base g-orthonormée. L'unique connexion *sans torsion* $\bigtriangledown$ associée à la métrique, *i.e.* telle que

$$dg(\xi_1,\xi_2)=g(\bigtriangledown\xi_1,\xi_2)=g(\xi_1,\bigtriangledown\xi_2)$$

pour tous champs de vecteurs ξ_1,ξ_2, est donc aussi *sans courbure*.
– Le champ unité est *horizontal* pour $\bigtriangledown$: $\bigtriangledown e=0$.
– Le produit est *auto-adjoint* relativement à g, c'est-à-dire que, pour tous champs de vecteurs ξ_1,ξ_2,ξ_3, on a

$$g(\xi_1\star\xi_2,\xi_3)=g(\xi_1,\xi_2\star\xi_3)\overset{\text{déf}}{=}c(\xi_1,\xi_2,\xi_3).$$

– Le 4-tenseur $\bigtriangledown c$ est *symétrique* en ses quatre arguments.

Conditions d'homogénéité Beaucoup d'exemples connus ont une propriété d'homogénéité, qui se traduit par l'existence d'un *champ d'Euler* et d'une constante d'homogénéité :

il existe un champ de vecteurs $\mathfrak{E}$ (champ d'Euler) et un nombre complexe D soumis aux conditions suivantes :

(1) l'endomorphisme $\bigtriangledown\mathfrak{E}$ de Θ_M est une section $\bigtriangledown$-horizontale de $\operatorname{End}_{\mathcal{O}_M}(\Theta_M)$;
(2) on a $\mathcal{L}_{\mathfrak{E}}(g(\xi,\eta))-g(\mathcal{L}_{\mathfrak{E}}\xi,\eta)-g(\xi,\mathcal{L}_{\mathfrak{E}}\eta)=D\cdot g(\xi,\eta)$ pour tous champs ξ,η ; autrement dit, $\mathcal{L}_{\mathfrak{E}}(g)=D\cdot g$;

(3) on a $\mathcal{L}_{\mathfrak{E}}(\xi\star\eta)-\mathcal{L}_{\mathfrak{E}}\xi\star\eta-\xi\star\mathcal{L}_{\mathfrak{E}}\eta=\xi\star\eta$ pour tous champs ξ,η ; autrement dit, $\mathcal{L}_{\mathfrak{E}}(\star)=\star$.

2. Pourquoi attribuer ces structures à Frobenius ?

3. Pourquoi s'intéresser aux structures de Frobenius ?

Le développement récent de la théorie s'est fait en parallèle avec le développement de la *symétrie miroir*, qui prend sa source dans des théories de champs en physique. Néanmoins, on peut dire que la structure avait été découverte par Kyoji Saito à la fin des années 70, sur les exemples de type B.

Il y a plusieurs approches du phénomène de symétrie miroir, qui décrit des correspondences entre objets de la géométrie algébrique. Une variété projective lisse donne lieu à un objet de type A. Son « miroir » serait un objet de type B donnant la même variété de Frobenius.

Par exemple, dans un article récent, S. Barannikov associe à l'espace projectif complexe $\mathbf{P}^n$ la fonction $f=x_0+x_1+\cdots+x_n$ sur le tore $X=\{x_0x_1\cdots x_n=1\}\subset\mathbf{C}^{n+1}$.

Ce type d'approche de la symétrie miroir a été proposé par A. Givental.

C'est cependant B. Dubrovin qui a développé la géométrie sous-jacente des variétés de Frobenius. Il s'agissait de mieux comprendre la géométrie des équations dites « WDVV », qui interviennent aussi dans la symétrie miroir. Ce sont des équations non linéaires aux dérivées partielles. Il a aussi développé l'approche « isomonodromique » de la structure.

4. Quelles sont les variétés susceptible de porter une structure de Frobenius ?

Exemples de type B. Il s'agit essentiellement de variétés de paramètres universels : espaces de modules, espaces de déformations universelles.

(1) Soit $f:\mathbf{C}^n\to\mathbf{C}$ un polynôme ayant un point critique isolé à l'origine. On suppose pour simplifier que la valeur critique correspondante est nulle. Ainsi,

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(0)=\cdots=\frac{\partial f}{\partial x_n}(0)=0\quad\text{et}\quad f(0)=0.$$

Le prototype est le polynôme d'une variable ($n=1$) $f(x)=x^{d+1}$.

Le *nombre de Milnor* $\mu(f,0)$ de f en 0 est la dimension finie du quotient

$$\mathbf{C}\{x_1,\dots,x_n\}/(\partial f/\partial x_1,\dots,\partial f/\partial x_n).$$

On choisit une base de ce quotient, dont on prend des représentants polynomiaux $\varphi_0=1,\varphi_1,\dots\varphi_{\mu-1}$.

L'espace de paramètres du déploiement universel de f en 0 est le germe $\mathbf{C}^{\mu-1}$ muni de coordonnées $z_1,\dots,z_{\mu-1}$. Le déploiement est le polynôme

$$F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})=f(\boldsymbol{x})+\sum_{j=1}^{\mu}z_j\varphi_j(\boldsymbol{x}).$$

(2) Au lieu de travailller au voisinage de 0, on peut travailler avec le polynôme lui-même, et prendre pour espace de paramètres un espace de dimension

$$\mu(f)=\dim\mathbf{C}[x_1,\dots,x_n]/(\partial f/\partial x_1,\dots,\partial f/\partial x_n).$$

Ce nombre est fini si et seulement si tous les points critiques de f sont isolés. Ils sont alors en nombre fini. Néanmoins, il est important d'imposer une absence de singularité du polynôme « à l'infini ».

(3) Il n'est pas nécessaire de travailler sur l'espace affine. On peut aussi considérer une variété affine plus générale, par exemple le tore $X = \{x_0 \cdots x_n = 1\} \simeq (\mathbf{C}^*)^n$; et dessus, une fonction algébrique, par exemple la fonction f induite par la forme linéaire $x_0 + \cdots + x_n$. Si on choisit les coordonnées $x_1, \dots, x_n$ sur X (qui satisfont $x_i \neq 0$ pour tout $i = 1, \dots, n$), la fonction f est le polynôme de Laurent

$$f(\boldsymbol{x}) = x_1 + \cdots + x_n + \frac{1}{x_1 \cdots x_n}.$$

Les points critiques sont les points

$$x_0 = x_1 = \cdots = x_n = \zeta, \quad \text{avec } \zeta^{n+1} = 1.$$

Le nombre de Milnor $\mu(f) = n + 1$ est la dimension du quotient

$$\dim \mathbf{C}[x_1, x_1^{-1}, \dots, x_n, x_n^{-1}] \big/ \big((x_1 - x_0), \dots, (x_n - x_0)\big) \quad \text{avec } x_0 = 1 \big/ \textstyle\prod_{i=1}^n x_i.$$

on peut prendre pour base les classes des éléments $1, x_0, \dots, x_0^n$. Un déploiement de f s'écrit

$$F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) = x_1 + \cdots + x_n + z_0 + (1 + z_1)x_0 + z_2 x_0^2 + \cdots + z_n x_0^n.$$

(4) Les *espaces de Hurwitz*, qui paramètrent les revêtements ramifiés de $\mathbf{P}^1$, c'est-à-dire les fonctions méromorphes sur une surface de Riemann de genre fixé, dont les ordres des pôles sont aussi fixés.

5. Quelles sont les structures de Frobenius « intéressantes » ?

6. Une digression : équations différentielles sur $\mathbf{P}^1$

7. Suite de la digression : déformations « isomonodromiques »

La théorie des déformations isomonodromiques est une machine à produire des systèmes *non linéaires* d'équations différentielles ou aux dérivées partielles dans le domaine complexe et ce, à partir d'une équation ou d'un système d'équations *linéaires* d'une variable complexe. Elle donne en même temps un procédé (peu explicite en général) pour les résoudre, ainsi que des propriétés remarquables des solutions de ces systèmes (la propriété dite « de Painlevé » notamment). Si, au début, seule était considérée la déformation d'*équations* différentielles linéaires d'une variable complexe à coefficients polynomiaux, il est apparu plus tard que la déformation des systèmes linéaires de plusieurs équations pouvait jeter une lumière nouvelle sur la question, par l'usage d'outils de la géométrie algébrique ou différentielle : fibrés vectoriels, connexions, *etc.*

Pendant longtemps (et c'est toujours essentiellement le cas), cette méthode a servi aux théoriciens des systèmes dynamiques et aux physiciens qui analysent les équations non linéaires produites par des systèmes dynamiques intégrables : faire apparaître ces équations comme équations d'isomonodromie est en quelque sorte une linéarisation du problème initial. De ce point de vue, les équations de Painlevé ont joué le rôle de prototype, depuis l'article de R. Fuchs, suivi par ceux de R. Garnier, qui a montré comment la sixième pouvait s'écrire comme équation d'isomonodromie, sortant ainsi du strict cadre de la recherche de nouvelles fonctions transcendantes.

8. Les variétés de Frobenius : approche isomonodromique

9. Les variétés de Frobenius : approche géométrique

10. Les variétés de Frobenius : approche potentielle

Lille, octobre 2001

C. Sabbah, UMR 7640 du CNRS, Centre de Mathématiques, École polytechnique, F–91128 Palaiseau cedex, France • *E-mail :* sabbah@math.polytechnique.fr
Url : http://www.math.polytechnique.fr/cmat/sabbah/sabbah.html