LA FILTRATION DE HODGE IRRÉGULIÈRE
EXPOSÉ AU WORKSHOP THÉORIE DE HODGE (JUSSIEU) 20 DÉCEMBRE 2012

Claude Sabbah

Résumé. Étant donnée une fonction régulière f sur une variété quasi-projective complexe lisse, nous généralisons une construction de Deligne (1984) d'une « filtration de Hodge irrégulière » sur l'hypercohomologie du complexe de de Rham de la variété muni de la différentielle tordue $\mathrm{d}+\mathrm{d}f$, et nous montrons la dégénérescence en E_1 de la suite spectrale associée. Une démonstration utilise la théorie des $\mathscr{D}$-modules avec structure de twisteur. Une autre approche est due à Kontsevich, qui propose une preuve par réduction à la caractéristique p, et M. Saito, qui utilise des arguments de Steenbrink. Ceci est un travail en commun avec Hélène Esnault et Jeng-Daw Yu.

1. Introduction et motivations

1.a. Régularité et théorie de Hodge (cas d'une courbe). Soit S une courbe algébrique lisse sur $\mathbb{C}$ (mais pas nécessairement projective) et soit V un fibré algébrique sur S muni d'une connexion $\nabla : V \to \Omega^1_S \otimes V$. La connexion peut avoir des singularités régulières ou irrégulières à l'infini.

Exemples 1.1.

(1) Soit $\omega \in H^0(S, \Omega^1_S)$. Alors $\mathrm{d} + \omega$ définit une connexion sur le fibré trivial $\mathscr{O}_S$. Si ω présente des pôles d'ordre $\geqslant 2$ dans une (ou toute) compactification lisse $\overline{S}$ de S, la connexion est à singularités irrégulières.

(2) Supposons que $(V^{\mathrm{an}}, \nabla^{\mathrm{an}})$ soit un fibré holomorphe à connexion sur S^{an} qui est sous-jacent à une variation de structure de Hodge complexe (ou réelle, ou rationnelle) polarisée, de filtration de Hodge $F^\bullet V^{\mathrm{an}}$. Alors le sous-faisceau sur $\overline{S}^{\mathrm{an}}$ des sections de V^{an} dont la norme est à croissance modérée au voisinage de $\infty := \overline{S} \smallsetminus S$ est un $\mathscr{O}_{\overline{S}^{\mathrm{an}}}(*\infty)$-module localement libre, et la connexion ∇^{an} s'étend en une connexion méromorphe $\overline{\nabla}^{\mathrm{an}}$. De plus, cette connexion est à singularité régulière à l'infini (théorème de Griffiths-Schmid, [**Sch73**, Th. 4.13(a)]). Par une variante de GAGA sur la courbe projective $\overline{S}$, on obtient un fibré (V, ∇) à singularité régulière à l'infini.

1.b. Analogies arithmétiques. Je cite ici Deligne ([**DMR07**, p. 1-2]) :

« Qu'est ce que la théorie ℓ-adique suggère pour les $\mathscr{D}$-modules holonomes à singularités non nécessairement régulières – ou certains d'entre eux ? J'ai réfléchi aux phénomènes de caractéristique p suivants.

(a) Un faisceau ℓ-adique fait souvent partie – au moins conjecturalement – d'une famille « compatible » de faisceaux ℓ'-adiques, ℓ' parcourant les nombres premier $\neq p$ (ou les places finies premières à p d'un corps de nombres).

(b) Pour $f : X \to S$ propre et S de dimension un, on dispose d'une théorie des cycles évanescents reliant la singularité de $R^if_*\mathscr{F}$ en $s \in S$ à des propriétés locales de $\mathscr{F}$ aux points de X au-dessus de s.

(c) La cohomologie est munie d'une action de Frobenius ; les valeurs absolues complexes (resp. p-adiques) des valeurs propres sont liées à des filtrations par le poids (resp. de Hodge).

(d) ...

...On aimerait aussi disposer d'une notion de $\mathscr{D}$-modules holonomes munis de « compagnons » en presque toute caractéristique p, dépendant du choix d'un caractère ψ du groupe additif de $\mathbb{F}_p$, à valeur dans une extension finie E_λ de $\mathbb{Q}_\ell$... ».

Puis [**Del07**] :

« L'analogie entre fibrés vectoriels à connexion intégrable à singularités irrégulières sur une variété algébrique complexe X, et faisceaux ℓ-adiques à ramification sauvage sur une variété algébrique de caractéristique p, amène à se demander dans quelle mesure un tel fibré vectoriel à connexion intégrable (resp. sa cohomologie) peut faire partie d'un « système de réalisations » analogue à ce que fournit une ? famille de motifs paramétrée par X (resp. un motif)... »

« Dans le cas « motivique », tout groupe de cohomologie de de Rham admet une filtration de Hodge naturelle. Peut-on en espérer une sur des $H^i_{\mathrm{dR}}(U,V)$ pour certains V à singularités irrégulières ? J'espère que tel est le cas pour V de la forme « e^f »$\otimes$(une variation de structures de Hodge polarisable), à cela près qu'on doit permettre à la filtration de Hodge d'être indexée par $\mathbb{R}$. Nous traiterons du cas où U est de dimension un et où la variation est un fibré vectoriel à connexion à singularités régulières et à monodromie unitaire – considéré comme étant de type $(0,0)$. »

1.c. Symétrie miroir et nombres de Hodge. Pour certaines variétés de Fano, le miroir supposé est une fonction $f : X \to \mathbb{A}^1$. Kontsevich conjecture que les nombres de Hodge de la variété de Fano se lisent sur le miroir via une filtration sur la cohomologie $H^k_{\mathrm{dR}}(X, \mathrm{d}+\mathrm{d}f)$. Nous verrons que cette filtration n'est autre que la filtration de Hodge irrégulière telle que suggérée par Deligne, et étendue en dimension quelconque par J.-D. Yu.

1.d. Vers des modules de Hodge (purs ou mixtes) irréguliers. À la suite des travaux de T. Mochizuki, on peut espérer l'existence d'une théorie de modules de Hodge à singularités éventuellement irrégulières. La définition d'une structure de Betti (sur $\mathbb{Q}$ par exemple) sur un $\mathscr{D}$-module holonome, et la preuve de son bon comportement par divers foncteurs, ont été donnés par Mochizuki [**Moc10**].

Les résultats récents que je vais expliquer représentent un cas particulier du type de résultat auquel on peut s'attendre dans le cas irrégulier. En général, il est probable qu'il faudra s'appuyer sur les travaux fondamentaux de T. Mochizuki [**Moc11**].

2. Quelques résultats

2.a. P. Deligne (1984) [Del07]. Comme indiqué plus haut, Deligne part d'un fibré $(V, \nabla^{\mathrm{reg}})$ sur une courbe affine S tel que $(V^{\mathrm{an}}, \nabla^{\mathrm{reg,an}})$ soit unitaire, et considère le fibré (V, ∇), avec $\nabla = \nabla^{\mathrm{reg}} + \mathrm{d}f$, avec $f \in \mathscr{O}(S)$. Il s'agit de munir $H^1_{\mathrm{dR}}(S, (V, \nabla)) := H^1(\Omega^\bullet(S) \otimes V(S), \nabla)$ d'une filtration « de Hodge ». Plus précisément, on considère le complexe de faisceaux $j_*(\Omega^\bullet_S \otimes V, \nabla)$ sur $\overline{S}$ (où $j : S \hookrightarrow \overline{S}$.) Deligne définit une filtration de ce complexe

$$F^p_{\mathrm{Del}} j_*(\Omega^\bullet_S \otimes V, \nabla)$$

et montre un résultat de dégénérescence en E_1 :

$$\boldsymbol{H}^1\big(\overline{S}, F^p_{\mathrm{Del}} j_*(\Omega^\bullet_S \otimes V, \nabla)\big) \longrightarrow \boldsymbol{H}^1\big(\overline{S}, j_*(\Omega^\bullet_S \otimes V, \nabla)\big) = \boldsymbol{H}^1\big(S, (\Omega^\bullet_S \otimes V, \nabla)\big).$$

On s'attend à ce que les exposants de F_{Del} soient rationnels, voire réels. Je ne vais pas donner la formule pour F_{Del} maintenant, mais je vais expliquer pourquoi Deligne s'attend à des exposants rationnels ou réels.

On considère $S = \mathbb{A}^1$ (coord. t) et $f(t) = t^2$. On a $\dim H^1_{\mathrm{dR}}(\mathbb{A}^1, \mathrm{d} - \mathrm{d}(t^2)) = 1$, engendré par la classe de $\mathrm{d}t \otimes e^{-t^2}$. La période de cette classe le long du 1-cycle à support fermé $\mathbb{R}$ vaut $\pi^{1/2}$. Deligne suggère que ceci indique que la classe de $\mathrm{d}t \otimes e^{-t^2}$ est de type de Hodge $1/2$, c'est-à-dire $H^1 = F^{1/2}_{\mathrm{Del}} H^1 = \mathrm{gr}^{1/2}_{F_{\mathrm{Del}}} H^1$.

« L'exemple de « $e^{z+\lambda/z}$ » sur $\mathbb{P}^1$ montre qu'on ne doit pas espérer que les filtrations de Hodge que nous avons définies soient opposées à leur complexe conjuguée et définissent ainsi une graduation. Le lecteur peut se demander à quoi peut servir une filtration « de Hodge » ne donnant pas lieu à une structure de Hodge. Un espoir est qu'elle impose des bornes à des valuations p-adiques de valeurs propres de Frobenius. Que la cohomologie de « $e^{-x}x^\alpha$ » ($0 < \alpha < 1$) est purement de filtration de Hodge $1-\alpha$ est analogue aux formules donnant la valuation p-adique des sommes de Gauss. » ([**Del07**]).

2.b. C.S. (2010) [Sab10]. J'ai donné une généralisation de la formule de Deligne dans le cas où $(V, \nabla^{\mathrm{reg}})$ sous-tend une variation de structure de Hodge complexe polarisée, et où on considère, comme Deligne, une connexion du type $\nabla^{\mathrm{reg}} + \mathrm{d}f$. J'ai démontré la dégénérescence en E_1 de la suite spectrale correspondante. L'outil est la transformation de Fourier et la théorie des $\mathscr{D}$-modules avec structure de twisteur.

2.c. J.-D. Yu (2012) [Yu12]. Plus récemment, a proposé la formule suivante, dans le cas de $(V, \nabla^{\mathrm{reg}}) = (\mathscr{O}, \mathrm{d})$ sur une variété quasi-projective lisse U sur $\mathbb{C}$ et $f \in \Gamma(U, \mathscr{O}_U)$, qu'on compactifie sous la forme $f : X \to \mathbb{P}^1$, $X = U \cup D$ avec D à croisements normaux. On note P le diviseur (non nécessairement réduit) des pôles de $f : X \to \mathbb{P}^1$. On note ∇ la connexion $\mathrm{d} + \mathrm{d}f$.

Alors Yu considère la filtration suivante sur le complexe de de Rham méromorphe $(\Omega^\bullet_X(*D), \nabla)$:

$$\begin{aligned} &F^\lambda_{\mathrm{Yu}}(\Omega^\bullet_X(*D), \nabla) \\ &\qquad := \Big\{ \mathscr{O}_X([-\lambda P])_+ \xrightarrow{\nabla} \Omega^1_X(\log D)([(1-\lambda)P])_+ \xrightarrow{\nabla} \cdots \\ &\qquad\qquad \xrightarrow{\nabla} \Omega^n_X(\log D)([(n-\lambda)P])_+ \Big\}, \end{aligned}$$

avec, pour $\mu \in \mathbb{Q}$,

$$\Omega^k_X(\log D)([\mu P])_+ = \begin{cases} \Omega^k_X(\log D)([\mu P]) & \text{si } \mu \geqslant 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Yu a montré la dégénérescence en E_1 de la suite spectrale associée dans plusieurs cas particuliers.

3. Dégénérescence en E_1 : différentes approches

3.a. Esnault-Sabbah-Yu (2012) [?].

Théorème. *Soit X une variété projective lisse complexe et $F : X \times \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ la projection. Soit $(\mathscr{M}, F^\bullet\mathscr{M})$ un $\mathscr{D}_{X\times\mathbb{P}^1}$-module holonome filtré sous-jacent à un module de Hodge mixte.*

- *On peut définir canoniquement et fonctoriellement une bonne filtration $F^\bullet_{\mathrm{Del}}(\mathscr{M} \otimes \mathscr{E}^F)$.*
- *Pour tout morphisme de modules de Hodge mixtes $(\mathscr{M}, F^\bullet\mathscr{M}) \to (\mathscr{M}', F^\bullet\mathscr{M}')$, le morphisme correspondant*

$$(\mathscr{M} \otimes \mathscr{E}^F, F^\bullet_{\mathrm{Del}}(\mathscr{M} \otimes \mathscr{E}^F)) \longrightarrow (\mathscr{M}' \otimes \mathscr{E}^F, F^\bullet_{\mathrm{Del}}(\mathscr{M}' \otimes \mathscr{E}^F))$$

est strict.

- *La suite spectrale d'hypercohomologie du complexe de de Rham filtré $F^\bullet_{\mathrm{Del}}\,\mathrm{DR}(\mathscr{M}\otimes\mathscr{E}^F)$ dégénère en E_1.*

Dans la situation considérée par Yu, on considère d'abord $\mathscr{O}_X(*D)$ avec sa filtration de Hodge, et on définit la filtration $F^\bullet_{\mathrm{Del}}(\mathscr{O}_X(*D) \otimes \mathscr{E}^f)$ par

$$\begin{aligned} F^\lambda_{\mathrm{Del}}(\mathscr{O}_X(*P_{\mathrm{red}}) \otimes \mathscr{E}^f) &:= F^p\mathscr{O}(*P_{\mathrm{red}})([-\lambda P]), \quad p = \lceil\lambda\rceil, \\ F^\lambda_{\mathrm{Del}}(\mathscr{O}_X(*D) \otimes \mathscr{E}^f) &:= \sum_{\mu+q\geqslant\lambda} F^\mu_{\mathrm{Del}}(\mathscr{O}_X(*P_{\mathrm{red}}) \otimes \mathscr{E}^f) \cdot F^q\mathscr{O}(*H) \end{aligned}$$

et le complexe filtré de Yu est quasi-isomorphe à $F^\bullet_{\mathrm{Del}}\,\mathrm{DR}(\mathscr{M}\otimes\mathscr{E}^f)$. On considère ensuite $\mathscr{M}=i_{f,+}\mathscr{O}_X(*D)$, où $i_f : X\hookrightarrow X\times\mathbb{P}^1$ est l'inclusion du graphe de f. La filtration $F^\bullet_{\mathrm{Del}}(\mathscr{M}\otimes\mathscr{E}^F)$ est l'image directe de la filtration $F^\bullet_{\mathrm{Del}}(\mathscr{O}_X(*D)\otimes\mathscr{E}^f)$ par cette inclusion. Le théorème donne la dégénérescence pour le complexe de Yu.

3.b. Kontsevich (2012) [Kon12a, Kon12b]. Dans la situation considérée par Yu, Kontsevich a considéré le complexe suivant :

$$\begin{aligned}\Omega^p_f &= \bigl\{\omega\in\Omega^p_X(\log D)\mid \mathrm{d}f\wedge\omega\in\Omega^{p+1}_X(\log D)\bigr\}\\ &= \mathrm{Ker}\Bigl\{\Omega^p_X(\log D)\xrightarrow{\;\mathrm{d}f\;}\Omega^{p+1}_X(\log D)(P)/\Omega^{p+1}_X(\log D)\Bigr\}\\ &= \mathrm{Ker}\Bigl\{\Omega^p_X(\log D)\xrightarrow{\;\nabla\;}\Omega^{p+1}_X(\log D)(P)/\Omega^{p+1}_X(\log D)\Bigr\}.\end{aligned}$$

On a en particulier :

$$\Omega^0_f=\mathscr{O}_X(-P),\quad \Omega^n_f=\Omega^n_X(\log D).$$

Les Ω^p_f sont $\mathscr{O}_X$-localement libres, et on peut munir ce complexe des différentielles $u\mathrm{d}+v\mathrm{d}f$ pour $(u,v)\in\mathbb{C}^2$.

Théorème. *Pour tout k, la dimension de $\boldsymbol{H}^k\bigl(X,(\Omega^\bullet_f,u\mathrm{d}+v\mathrm{d}f)\bigr)$ ne dépend pas de u,v et est égale à $\dim H^k_{\mathrm{dR}}(U,\nabla)$. Autrement dit, pour tout couple $(u,v)\neq(0,0)$, la suite spectrale*

$$E_1^{p,q}=H^q(X,\Omega^p_f)\Longrightarrow \boldsymbol{H}^{p+q}\bigl(X,(\Omega^\bullet_f,u\mathrm{d}+v\mathrm{d}f)\bigr)$$

dégénère en E_1.

On peut envisager au-moins deux stratégies pour montrer ce théorème :

$$\begin{tikzcd}(0,1) \arrow[r, dash, "\text{M.K.-S.B., C.S.}"] & (1,1) \arrow[r, dash, "\text{(M.K.)}"] & (1,0) \\ & (0,0) \arrow[ur, dash, "\text{(M.K.)}", "\text{(M.S.)}"'] & \end{tikzcd}$$

Méthode de Kontsevich

$$\begin{tikzcd}(0,1) \arrow[r, dash, "\text{M.K.-S.B., C.S.}"] & (1,1) \arrow[r, dash, "\text{Cor. E-S-Y}"] \arrow[d, dash, "\text{Cor. E-S-Y}"'] & (1,0) \\ & (0,0) & \end{tikzcd}$$

Méthode de E-S-Y

La dégénérescence $(0,0)\Rightarrow(1,0)$ est montrée par Kontsevich lorsque P est réduit, par réduction à la caractéristique p en appliquant la méthode de Deligne-Illusie.

La dégénérescence $(0,0)\Rightarrow(1,1)$ est conséquence de la dégénérescence de la filtration de Yu (pour les exposants entiers) car on a :

$$\sigma^p(\Omega^\bullet_f,\nabla)\xrightarrow{\;\sim\;}F^p_{\mathrm{Yu}}(\Omega^\bullet_X(*D),\nabla),\quad \forall\,p.$$

3.c. M. Saito (2012), Appendice à [?]. Dans un appendice à [?], Morihiko Saito propose une approche complètement différente de la dégénérescence $(0,0) \Rightarrow (1,0)$, en s'appuyant sur les premiers résultats de Steenbrink [**Ste76, Ste77**] concernant les limites de structure de Hodge des fibres d'un morphisme vers un disque. L'idée consiste à considérer la suite exacte de complexes (avec différentielles d)

$$0 \longrightarrow \Omega_f^\bullet \longrightarrow \Omega^\bullet(\log D) \longrightarrow Q^\bullet \longrightarrow 0.$$

Le complexe quotient Q est supporté par le diviseur P_{red}, de sorte qu'on peut, pour l'analyser, travailler localement analytiquement au voisinage de P_{red} et considérer la fonction $g = 1/f$. Alors $Q^\bullet$ s'identifie à la restriction à P du complexe logarithmique relatif :

$$Q^\bullet = \Omega^\bullet_{X'/\Delta}(\log D)\Big/ g\Omega^\bullet_{X_\Delta/\Delta}(\log D)$$

qui a été considéré par Steenbrink, où Δ est un voisinage de ∞ dans $\mathbb{P}^1$ et $X_\Delta = f^{-1}(\Delta)$. C'est avec la filtration bête de ce complexe que Steenbrink définit la filtration de Hodge limite (c'est-à-dire sur les cycles proches le long de P_{red}) du morphisme g. M. Saito utilise la dégénérescence correspondante pour la filtration bête sur $Q^\bullet$ et celle (due à Deligne) pour la filtration bête de $\Omega^\bullet(\log D)$ pour en déduire celle pour la filtration bête de $\Omega_f^\bullet$.

Références

[Del07] P. Deligne – « Théorie de Hodge irrégulière (mars 1984 & août 2006) », in *Singularités irrégulières, Correspondance et documents* [**DMR07**], p. 109–114 & 115–128.

[DMR07] P. Deligne, B. Malgrange & J.-P. Ramis – *Singularités irrégulières, Correspondance et documents*, Documents mathématiques, vol. 5, Société Mathématique de France, Paris, 2007.

[Kon12a] M. Kontsevich – « Letters to L. Katzarkov & T. Pantev », March 14 & 31, 2012.

[Kon12b] ———, « Letters to H. Esnault & J.-D. Yu », May 3 & 7, 2012.

[Moc10] T. Mochizuki – « Holonomic $\mathscr{D}$-modules with Betti structure », arXiv : `http://arxiv.org/abs/1001.2336`, 2010.

[Moc11] ———, *Wild harmonic bundles and wild pure twistor D-modules*, Astérisque, vol. 340, Société Mathématique de France, Paris, 2011.

[Sab10] C. Sabbah – « Fourier-Laplace transform of a variation of polarized complex Hodge structure, II », in *New developments in Algebraic Geometry, Integrable Systems and Mirror symmetry (Kyoto, January 2008)*, Advanced Studies in Pure Math., vol. 59, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2010, p. 289–347, arXiv : `http://arxiv.org/abs/0804.4328`.

[Sch73] W. Schmid – « Variation of Hodge structure : the singularities of the period mapping », *Invent. Math.* **22** (1973), p. 211–319.

[Ste76] J.H.M. Steenbrink – « Limits of Hodge structures », *Invent. Math.* **31** (1976), p. 229–257.

[Ste77] ———, « Mixed Hodge structure on the vanishing cohomology », in *Real and Complex Singularities (Oslo, 1976)* (P. Holm, éd.), Sijthoff and Noordhoff, Alphen aan den Rijn, 1977, p. 525–563.

[Yu12] J.-D. Yu – « Irregular Hodge filtration on twisted de Rham cohomology », arXiv : http://arxiv.org/abs/1203.2338, 2012.

8 avril 2013

C. Sabbah, UMR 7640 du CNRS, Centre de Mathématiques Laurent Schwartz, École polytechnique, F–91128 Palaiseau cedex, France • *E-mail :* sabbah@math.polytechnique.fr
Url : http://www.math.polytechnique.fr/~sabbah