# COHOMOLOGIE QUANTIQUE DE LA GRASSMANNIENNE COMME PRODUIT ALTERNÉ DE VARIÉTÉS DE FROBENIUS

**GRENOBLE, MARS 2007**

Claude Sabbah

***Résumé.*** La cohomologie quantique d'une variété possède une structure de variété de Frobenius. Si la cohomologie quantique de l'espace projectif est bien comprise, celle de la grassmannienne n'était connue que sur sa petite partie. J'expliquerai des résultats récents, obtenus en collaboration avec I. Ciocan-Fontanine et B. Kim, donnant une méthode pour déduire la cohomologie quantique du quotient d'une variété sous l'action d'un groupe réductif de celle du quotient sous l'action d'un tore maximal. Pour la grassmannienne $G(r, n+1)$, cette construction s'interprète comme le produit alterné, au sens des variétés de Frobenius, de la cohomologie quantique de l'espace projectif $\mathbb{P}^n$ par elle-même $r$ fois.

## Introduction

On se donne une action linéaire d'un groupe réductif G sur un $\mathbb{C}$-espace vectoriel $V$, action contenant les homothéties. Soit $\mathrm{T} \subset \mathrm{G}$ un tore maximal. On a la notion de point stable et semi-stable pour T ou G. Faisons l'hypothèse que pour un tore maximal, les points stables et semi-stables coïncident. On sait alors que c'est vrai pour tout tore maximal ainsi que pour G, et les quotients $V/\!\!/\mathrm{T} \overset{\text{déf}}{=} V^{\mathrm{s}}(\mathrm{T})/\mathrm{T}$ et $V/\!\!/\mathrm{G} \overset{\text{déf}}{=} V^{\mathrm{s}}(\mathrm{G})/\mathrm{G}$ sont des variété projectives. De plus, le groupe de Weyl agit sur $V/\!\!/\mathrm{T}$. On a un diagramme

$$\begin{tikzcd} V/\!\!/\mathrm{T} = V^{\mathrm{s}}(\mathrm{T})/\mathrm{T} & V^{\mathrm{s}}(\mathrm{G})/\mathrm{T} \arrow[l, hook', "j"'] \arrow[d, "\pi"] \\ & V/\!\!/\mathrm{G} = V^{\mathrm{s}}(\mathrm{G})/\mathrm{G} \end{tikzcd}$$

Par exemple, la grassmannienne $G(r, n+1)$ des $r$-plans dans $\mathbb{C}^{n+1}$ est de dimension $r(n+1-r)$. On la regarde plutôt comme l'ensemble des quotients de dimension $r$ de $\mathbb{C}^{n+1}$. On pose $V = \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^{n+1}, \mathbb{C}^r)$ et on fait agir $\mathrm{G} = \mathrm{GL}(r)$ par la représentation canonique sur $\mathbb{C}^r$. Alors les points semi-stables sont stables : ce sont les homomorphismes surjectifs, et $V^{\mathrm{s}}(\mathrm{G})/\mathrm{G}$ est $G(r, n+1)$. De manière analogue, $V/\!\!/\mathrm{T}$ est égal à $\mathbb{P}^n \times \cdots \times \mathbb{P}^n$ ($r$ fois).

La question que l'on se pose est : *peut-on déterminer les invariants de Gromov-Witten de genre* $0$ *de* $V/\!\!/\mathrm{G}$ *si on connaît ceux de* $V/\!\!/\mathrm{T}$*, et de quelle manière ?*

Par exemple, on a une formule inductive explicite pour les invariant de Gromov-Witten de genre 0 de $\mathbb{P}^n$ (Kontsevich). On sait comment obtenir ceux de $(\mathbb{P}^n)^r$. Comment en déduire ceux de la grassmannienne $G(r, n+1)$ ?

## 1. Le principe de la comparaison pour le cup produit

Soit W le groupe de Weyl de G relativement à T. Il agit sur $V^{\mathrm{s}}(\mathrm{G})/\mathrm{T}$ et sur $V^{\mathrm{s}}(\mathrm{T})/\mathrm{T}$ et on sait que $\pi^*$ induit un isomorphisme $H^*(V/\!\!/\mathrm{G})$ sur $H^*(V^{\mathrm{s}}(\mathrm{G})/\mathrm{T})^{\mathrm{W}}$. On en déduit un morphisme surjectif

$$H^*(V/\!\!/\mathrm{T})^{\mathrm{W}} = H^*(V^{\mathrm{s}}(\mathrm{T})/\mathrm{T})^{\mathrm{W}} \xrightarrow{\pi^{*-1}j^*} H^*(V/\!\!/\mathrm{G}).$$

On sait par ailleurs que $H^*(V/\!\!/\mathrm{G})$ s'identifie au sous-espace de $H^*(V^{\mathrm{s}}(\mathrm{T})/\mathrm{T})$ formé des éléments anti-invariants sous l'action de W. Plus précisément, il existe un élément $\omega^o$ anti-invariant tel qu'on ait

$$\begin{tikzcd} H^*(V/\!\!/\mathrm{T})^{\mathrm{W}} \arrow[r, two heads] \arrow[dr, "\cup\,\omega^o"'] & H^*(V/\!\!/\mathrm{G}) \arrow[d, "\wr"] \\ & H^*(V/\!\!/\mathrm{T})^{\mathrm{ant}} \end{tikzcd}$$

Par exemple, pour la grassmannienne, on a $H^*(V/\!\!/\mathrm{G}) = H^*(G(r, n+1))$, $H^*(V/\!\!/\mathrm{T}) = H^*((\mathbb{P}^n)^r) = \otimes^r H^*(\mathbb{P}^n)$ muni du cup produit produit tensoriel (formule de Kunneth). Si on note $H_i$ la classe de la $i$-ème section hyperplane, on a $\omega^o = \prod_{i>j}(H_i - H_j)$.

On peut retrouver une algèbre isomorphe à l'algèbre $H^*(V/\!\!/\mathrm{G})$ uniquement de données sur $H^*(V/\!\!/\mathrm{T})$ : on choisit un sous-espace gradué $\Sigma^* \subset H^*(V/\!\!/\mathrm{T})^{\mathrm{W}}$ sur lequel la restriction de $\cup\,\omega^o$ induit un isomorphisme gradué $\Sigma^* \to H^*(V/\!\!/\mathrm{T})^{\mathrm{ant}}$. Sur $\Sigma^*$, on définit le produit $\sqcup$ par la formule

$$(\sigma_1 \sqcup \sigma_2) \cup \omega^o = \sigma_1 \cup \sigma_2 \cup \omega^o,$$

(autrement dit, on projette $\sigma_1 \cup \sigma_2$ sur $\Sigma^*$ parallèlement à $\operatorname{Ker} \cup\omega^o$).

Pour la grassmannienne, il est usuel de choisir pour $\Sigma^*$ un sous-espace formé de polynômes de Schur appliqués aux $H_1, \dots, H_r$.

On remarque aussi que, grâce à une formule générale due à Martin, on peut retrouver, *via* le même isomorphisme, la dualité de Poincaré sur la cohomologie de la grassmannienne en posant $[\sigma_1, \sigma_2] = \langle \omega^o \cup \sigma_1, \omega^o \cup \sigma_2 \rangle$.

En conclusion, $\big(H^*(V/\!\!/\mathrm{G}), \cup, \langle\bullet,\bullet\rangle\big)$ est isomorphe à $\big(\Sigma^*, \sqcup, [\bullet,\bullet]\big)$.

On cherche à étendre ce procédé pour la cohomologie quantique. Pour ce faire, il est utile de regarder ces constructions non comme des constructions d'algèbre linéaire, mais comme des constructions de variétés.

## 2. Variétés de Frobenius

Une structure de variété de Frobenius sur une variété complexe $M$ consiste en la donnée

(1) d'une forme bilinéaire symétrique non dégénérée $g$ *plate* sur $\Theta_M$, de connexion de Levi-Civita (plate) associée notée $\nabla$,

(2) d'un produit $\mathcal{O}_M$-bilinéaire $\star$ sur $\Theta_M$, associatif, commutatif, à unité $e$,

(3) un champ d'homogénéité $\mathfrak{E}$,

soumis aux conditions de compatibilité :

(1) $\nabla e = 0$,

(2) soit $c \in \Gamma(M, {\Omega^1_M}^{\otimes 3})$ défini par $c(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = g(\xi_1 \star \xi_2, \xi_3)$, alors $\nabla c$ est symétrique en ses quatre arguments,

(3) (homogénéité) $\mathcal{L}_{\mathfrak{E}}(e) = -e$, $\mathcal{L}_{\mathfrak{E}}(\star) = (\star)$, $\exists\, D \in \mathbb{C}$, $\mathcal{L}_{\mathfrak{E}}(g) = Dg$.

Si on choisit des coordonnées plates $(t_1, \dots, t_n)$ sur $M$ (relativement à $g$), ces conditions impliquent l'existence d'une fonction holomorphe $F(t_1, \dots, t_n)$ telle que

$$\forall\, i, j, k, \quad g(\partial_{t_i} \star \partial_{t_j}, \partial_{t_k}) = \frac{\partial^3 F}{\partial t_i \partial t_j \partial t_k} \tag{(*)}$$

Cette fonction est définie à un polynôme de degré 2 près et satisfait une condition d'homogénéité $\mathcal{L}_{\mathfrak{E}} F \equiv (D+1)F$. La condition d'associativité de $\star$ se traduit par les équations WDVV sur $F$.

## 3. Cohomologie quantique

On a la notion de germe formel de variété de Frobenius au-dessus d'un germe formel de variété d'anneau $R$ (anneau de Novikov).

Si $X$ est une variété projective lisse sur $\mathbb{C}$, n'ayant que de la cohomologie en degrés pairs, et telle que $H_2(X, \mathbb{Z})$ soit sans torsion. On note $NE_1 \subset H_2(X, \mathbb{Z})$ le semi-groupe des classes effectives, on considère l'anneau $\mathbb{C}[NE_1]$ de ce semi-groupe, qu'on complète par rapport à l'idéal d'augmentation. On obtient l'anneau de Novikov $R$ des séries formelles $\sum_{\beta \in NE_1} c_\beta q^\beta$.

Exemple : pour la grassmannienne, on a $H_2 = \mathbb{Z}$, $NE_1 = \mathbb{N}$, $\mathbb{C}[NE_1] = \mathbb{C}[q]$ et $R = \mathbb{C}\,[\![q]\!]$.

La variété $M$ dans notre exemple est le germe formel en 0 de $H^*(X, \mathbb{C}) \times \mathbb{A}^1$ où $q$ est le paramètre de $\mathbb{A}^1$.

Tout ce qui suit est $R$-linéaire. Le fibré tangent de $M$ est trivial. On le munit de la forme bilinéaire (constante) induite par la dualité de Poincaré. Une base graduée $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_0, \dots, \gamma_{m-1})$ de $H^*(X, \mathbb{C})$ (considéré comme l'espace tangent en 0 de $M$) fournit un système de coordonnées plates $(t_0, \dots, t_{m-1})$. La fonction $F$ est donnée par ses coefficients, si on pose $\sigma = \sum_\nu t_\nu \gamma_\nu$,

$$F(q,t) = \sum_{\beta \in NE_1} \sum_{n \geqslant 0} q^\beta \frac{1}{n!} \langle \sigma, \dots, \sigma \rangle_{0,\beta,n}.$$

La formule $(*)$ permet de définir un produit $\star$ sur $\Theta_M$.

Dans ces coordonnées, le champ d'Euler s'écrit sous la forme

$$\mathfrak{E} = \sum_{i=0}^{m-1} \big(1 - \frac{\deg \gamma_i}{2}\big) + c_1(TX),$$

où, si $c_1(TX) \in H^2(X, \mathbb{C})$ s'écrit $\sum_{j=1}^r c_1^{(j)} \gamma_j$, alors $c_1(TX)$ vu comme champ de vecteur est $\sum_j c_1^{(j)} \partial_{t_j}$. On a alors $D = 2 - \dim X$.

Le potentiel $F$ a une forme spéciale, si on écrit $\beta \in NE_1$ sous la forme $\sum_{i=1}^r \beta_i \gamma_i$ :

$$F = F_{\mathrm{cl}}(t_0, \dots, t_{m-1}) + \sum_{\substack{\beta \in NE_1 \\ \beta \neq 0}} q^\beta e^{\sum \beta_i t_i} F_\beta(t_{r+1}, \dots, t_{m-1}),$$

où la partie classique $F_{\mathrm{cl}}(t_0, \dots, t_{m-1})$ est un polynôme de degré 3, qui redonne, par la formule $(*)$, le cup-produit usuel. L'homogénéité permet de réduire encore le domaine de sommation.

En conclusion, la cohomologie quantique a un aspect combinatoire et un aspect géométrique (variété de Frobenius).

Dans chacune de ces présentations, il y a un théorème de « reconstruction » qui permet de déterminer de manière unique la variété de Frobenius (*i.e.* le potentiel $F$) à partir de certains des coefficients. C'est le théorème de Kontsevich-Manin du côté combinatoire, et c'est essentiellement un théorème de Malgrange (généralisé récemment par Hertling et Manin) dans le cadre géométrique.

## 4. Variété de Frobenius avec action d'un groupe fini

On considère la situation suivante : on a une variété $M$ munie d'une structure de variété de Frobenius d'une part et d'une action d'un groupe fini $\mathrm{W}$ compatible (en un sens évident) avec cette structure. Soit $M^{\mathrm{W}}$ la variété des points fixes. Sur cette variété on considère la restriction $TM_{|M^{\mathrm{W}}}$ du fibré tangent, sur laquelle $\mathrm{W}$ agit de manière linéaire *via* $w_* = Tw$. De la compatibilité on déduit en particulier que les champs $e_{|M^{\mathrm{W}}}$ et $\mathfrak{E}_{|M^{\mathrm{W}}}$ sont invariants sous l'action du groupe.

Supposons que le groupe soit muni d'un caractère non trivial $\mathrm{sgn} : \mathrm{W} \to \{\pm 1\}$. On s'intéresse aux sections $\xi$ de $TM_{|M^{\mathrm{W}}}$ anti-invariantes par cette action, *i.e.* telles que $w_*\xi = \mathrm{sgn}(w)\xi$ pour tout $w \in \mathrm{W}$. On obtient un sous-fibré $E = TM^{\mathrm{ant}}_{|M^{\mathrm{W}}}$ de $TM_{|M^{\mathrm{W}}}$. Que reste-t-il sur $E$ de la structure de Frobenius ?

On obtient :

- une forme bilinéaire symétrique non dégénérée $g$ ;
- une connexion plate compatible à la forme bilinéaire $g$ (mais qu'il n'y a plus de sens de qualifier de « Levi-Civita ») : quand on dérive le long d'un champ invariant une section anti-invariante (et réciproquement), on obtient une section anti-invariante ;
- une action externe $\Phi : \Theta_{M^{\mathrm{W}}} \otimes E \to E$ obtenue à partir de $\star$ : $\Phi_\xi(\eta) = -\xi \star \eta$,
- en particulier, des opérateurs $R_0 = \Phi_{\mathfrak{E}}$ et $R_\infty = \nabla\mathfrak{E}$.

La compatibilité s'exprime par une série de relations, qu'on résume en ajoutant une variable $z$ et en demandant que la connexion sur $M^{\mathrm{W}} \times \mathbb{C}$ définie par

$$\nabla + \frac{\Phi}{z} - \Big(\frac{\Phi_{\mathfrak{E}}}{z} + \nabla\mathfrak{E}\Big)\frac{dz}{z}$$

soit plate. Enfin, on a une série de relations supplémentaires concernant la forme bilinéaire $g$.

On obtient alors ce que j'appelle une *pre-structure de Saito* sur $E$ (une notion essentiellement introduite par Kyoji Saito à la fin des années 1970). Que manque-t-il pour avoir une structure de variété de Frobenius ?

Il manque d'abord la variété, car $M^{\mathrm{W}}$ est en général trop gros. Choisissons alors une sous-variété $N \subset M^{\mathrm{W}}$ de dimension égale au rang de $E$. Il manque ensuite une identification $TN \simeq E_{|N}$, qui soit assez bonne pour que, en ramenant la pre-structure de Saito sur $TN$, on obtienne une structure de variété de Frobenius. On a un critère pour cela :

***Critère de K. Saito.*** *S'il existe une section $\omega$ de $E_{|N}$ qui satisfait aux conditions suivantes :*

(1) $\nabla\omega = 0$, *et il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\nabla_\omega\mathfrak{E} = \lambda\omega$,*
(2) $\xi \mapsto \xi \star \omega$ *est un isomorphisme $TN \xrightarrow{\sim} E$,*

*alors $N$ est muni d'une structure de variété de Frobenius* via *cette identification.*

**Conclusion.** Soit donc $M$ une variété de Frobenius munie d'une action d'un groupe fini W et soit $x^o \in M^{\mathrm{W}}$. Soit $\omega^o \in (T_{x^o}M)^{\mathrm{ant}}$ telle que $\nabla_{\omega^o}\mathfrak{E} = \lambda\omega^o$. Soit $(N, x^o) \subset (M^{\mathrm{W}}, x^o)$ un germe de sous-variété en $x^o$ tel que

$$\omega^o \star \bullet : T_{x^o}N \longrightarrow T_{x^o}M^{\mathrm{ant}}$$

soit un isomorphisme. Alors $N$ est canoniquement muni d'une structure de variété de Frobenius. La forme bilinéaire ${}^{\omega}g$ est donnée par

$$ {}^{\omega}g(\xi,\eta) = g_{|N}(\omega\star\xi, \omega\star\eta), $$

où $\omega$ est l'unique extension $\nabla$-horizontale de $\omega^o$. Enfin, le produit $\circ$ sur $TN$ est défini par

$$ (\xi\circ\eta)\star\omega = \xi\star\eta\star\omega. $$

## 5. Application à la cohomologie quantique

En appliquant les résultats précédents, pour tout choix de section graduée $\sigma : H^*(V/\!\!/\mathrm{G}) \hookrightarrow H^*(V/\!\!/\mathrm{T})^{\mathrm{W}}$ de la projection $\pi^{*-1}j^*$ on définit une structure de variété de Frobenius sur le germe formel $\big(H^*(V/\!\!/\mathrm{G}),0\big)$ à partir de la structure de Frobenius sur $\big(H^*(V/\!\!/\mathrm{T}),0\big)$.

***Théorème.*** *La cohomologie quantique de $G(n+1,r)$ s'obtient à partir de celle de $(\mathbb{P}^n)^r$ par le procédé ci-dessus, quel que soit le choix de la section graduée $\sigma$.*

*Quelques indications sur la démonstration.* Bertram, Ciocan-Fontanine et Kim avaient montré la coïncidence des « fonctions $J$ » restreintes à la « petite cohomologie », c'est-à-dire la sous-variété $H^2$. Le résultat se déduirait du théorème de Kontsevich-Manin et d'un théorème de reconstruction de Lee-Pandharipande s'il était vrai que $H^2(G(n+1,r))$ engendre la cohomologie $H^*(G(n+1,r))$ multiplicativement. Ce n'est pas le cas, comme on le voit sur le morphisme surjectif $H^2((\mathbb{P}^n)^r)^{\mathrm{W}} \to H^2(G(n+1,r))$, puisque le terme de gauche est de rang 1, donc celui de droite aussi.

L'idée est d'utiliser la cohomologie équivariante à la place de la cohomologie. Pour la grassmannienne, on fait opérer le tore $\mathrm{S} = (\mathbb{C}^*)^{n+1}$ à la source de $\mathrm{Hom}(\mathbb{C}^{n+1},\mathbb{C}^r)$ et on travaille avec la cohomologie S-équivariante, qui est un $\mathbb{C}[\lambda_0,\dots,\lambda_n]$-module. On peut montrer, à l'aide du théorème de localisation, que $H^2_{\mathrm{S}}(G(n+1,r))$ engendre $H^*_{\mathrm{S}}(G(n+1,r))$ après tensorisation par $\mathbb{C}(\lambda_0,\dots,\lambda_n)$.

Néanmoins, il faut développer tous les arguments ci-dessus dans un cadre équivariant, et adapter les démonstrations de Bertram, Ciocan-Fontanine, Kim à ce cadre, ainsi que les théorèmes de reconstruction. Dans la définition de variété de Frobenius, la notion de champ d'Euler doit être modifiée en ajoutant le terme $\sum_i \lambda_i\partial_{\lambda_i}$, mais, à part cela, la théorie intègre $\mathbb{C}[\lambda]$ comme un espace de paramètres, exactement comme pour l'anneau de Novikov. Autrement dit, dans le potentiel, on compte aussi le degré par rapport à $\lambda$.

Une fois démontré le théorème sur $\mathbb{C}[\lambda]$, on restreint à $\lambda=0$ pour obtenir le théorème dans sa version non équivariante. $\square$

## 6. Interprétation de la construction

Dans le cas de la grassmannienne, on peut écrire $H^*(G(n+1,r)) = \wedge^r H^*(\mathbb{P}^n)$ (comme espace vectoriel). On veut interpréter cette égalité comme une égalité de germes formels de variétés, *munies d'une structure de variété de Frobenius.*

Kauffman a construit (voir le livre de Manin) une notion de produit tensoriel de variétés de Frobenius. Celle-ci correspond, dans le cas de la cohomologie quantique, à la cohomologie quantique du produit des variétés (formule de Kunneth).

Dans certaines situations, en appliquant le théorème de reconstruction de Hertling et Manin, on peut construire le produit alterné $r$ fois d'une variété de Frobenius par elle-même. C'est le cas pour la cohomologie quantique de $\mathbb{P}^n$. Le théorème ci-dessus admet alors pour interprétation l'égalité, *comme variétés de Frobenius*, $H^*(G(n+1,r)) = \wedge^r H^*(\mathbb{P}^n)$.

### Références

---

C. Sabbah, UMR 7640 du CNRS, Centre de Mathématiques Laurent Schwartz, École polytechnique, F–91128 Palaiseau cedex, France • *E-mail :* sabbah@math.polytechnique.fr
*Url :* http://www.math.polytechnique.fr/~sabbah