

---

**STRUCTURE HERMITIENNE SUR CERTAINES  
VARIÉTÉS DE FROBENIUS**  
EXPOSÉ À L'ENS, NOVEMBRE 2005

Claude Sabbah

---

**Table des matières**

Introduction.....	1
1. Structure de twisteur.....	3
2. Variation intégrable de structure de twisteur polarisée de poids 0.....	5
3. Structure $tt^*$ .....	6
4. Le cas des polynômes de Laurent.....	7
Références.....	9

**Introduction**

Soit  $M$  une variété complexe munie d'une structure de variété de Frobenius (on pourrait aussi considérer un germe d'espace formel). Par définition, le fibré tangent  $TM$  est muni

- d'une forme bilinéaire non dégénérée  $g$  qui est *plate* (c'est-à-dire que la connexion de Levi-Civita  $\nabla$  associée à  $g$ , qui est l'unique connexion sans torsion compatible à  $g$ , est *plate*)
- d'un produit  $\star$  associatif et commutatif, admettant un champ unité  $e$  qui est  $\nabla$ -plat,

- d'un champ de vecteurs, appelé champ d'Euler et noté  $\mathfrak{E}$ .

On impose un certain nombre de conditions. Plusieurs sont exprimées de manière concise, en considérant une nouvelle variable  $z \in \mathbb{C}$ , sur le fibré  $\pi^*TM$ , où  $\pi : M \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  désigne la projection : on impose que la connexion  $\nabla$  sur  $\pi^*TM$  définie par les formules suivantes, pour tous champs de vecteurs holomorphes  $\xi, \eta$  sur  $M$ ,

$$\begin{aligned}\nabla_{\xi}\eta &= \nabla_{\xi}\eta - \frac{\xi \star \eta}{z} \\ \nabla_{\partial_z}\eta &= \frac{\mathfrak{E} \star \eta}{z^2} - \frac{\nabla_{\eta}\mathfrak{E}}{z}\end{aligned}$$

est *plate*.

On voit que la connexion méromorphe  $\nabla$  ainsi définie a des pôles le long de  $z = 0$  uniquement sur  $M \times \mathbb{C}$ , et qu'elle est de rang de Poincaré  $\leq 1$ .

Il existe de nombreux exemples de variétés de Frobenius. Dans cet exposé, je m'intéresserai au cas de l'espace des paramètres d'un déploiement universel d'un polynôme de Laurent commode et non dégénéré, qui porte une structure de Frobenius canonique (*cf.* [1]).

En 1991, Cecotti et Vafa ont introduit dans plusieurs articles une structure supplémentaire, dite structure  $tt^*$  (topological-antitopological fusion) en considérant sur  $M$  une forme hermitienne définie positive (*i.e.* une métrique) satisfaisant à certaines conditions de compatibilité avec la structure de Frobenius. En 1993, Dubrovin [2] a montré que ces conditions supplémentaires impliquent une propriété de pluri-harmonicité pour la métrique hermitienne. Plus récemment, Hertling [3] a

analysé plus en détail la structure  $tt^*$  et a indiqué un procédé général pour construire de telles structures. Il a détaillé le cas du déploiement universel de certaines singularités, où il a montré qu'une structure analogue existe, mais que la forme hermitienne construite sur le fibré tangent n'est pas nécessairement définie positive.

***Théorème (répondant à une conjecture d'Hertling)***

*Si  $M$  est l'espace des paramètres d'un déploiement universel d'un polynôme de Laurent commode et non dégénéré, alors la pseudo-structure  $tt^*$  définie par Hertling (i.e. la forme hermitienne non nécessairement définie positive) est une structure  $tt^*$ .*

***Exemple.*** Voici un exemple simple de polynôme de Laurent commode et non dégénéré  $f : (\mathbb{C}^*)^n \rightarrow \mathbb{C}$

$$f(u_1, \dots, u_n) = u_1 + \dots + u_n + \frac{1}{u_1^{w_1} \dots u_n^{w_n}},$$

où  $w_1, \dots, w_n$  sont des entiers  $\geq 1$  tels que  $\text{pgcd}(w_1, \dots, w_n) = 1$ .

## 1. Structure de twisteur

Il se trouve qu'à la même époque que Cecotti et Vafa, Corlette puis Simpson ont considéré la question de l'existence de métriques harmoniques sur un fibré holomorphe plat sur une variété kählérienne compacte, puis sur une surface de Riemann non compacte. C'est ce type de métrique hermitienne qui apparaît dans la structure  $tt^*$ .

Je vais décrire une manière un peu compliquée de construire une forme hermitienne sur un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel (et à la section suivante sur un fibré plat), manière qui est adaptée à la traduction en termes de structure  $tt^*$  par l'adjonction d'une nouvelle variable  $z$ .

Soit  $H$  un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie. On interprète  $H$  comme l'espace des sections globales d'un fibré sur  $\mathbb{P}^1$ . On présente ce fibré sous la forme d'un fibré obtenu par recollement.

Je note  $\Omega_0$  et  $\Omega_\infty$  les deux cartes affines de  $\mathbb{P}^1$  (centrées en 0 et  $\infty$  respectivement), et j'appelle  $z$  la coordonnée sur  $\Omega_0$ . Je considère l'automorphisme anti-linéaire

$$\sigma : \mathbb{P}^1 \longrightarrow \overline{\mathbb{P}^1}, \quad z \longmapsto -1/\bar{z}.$$

Soit  $\mathcal{H}$  un fibré holomorphe sur  $\Omega_0$  et  $\overline{\mathcal{H}}$  le fibré antiholomorphe associé. Alors  $\sigma^*\overline{\mathcal{H}}$  est un fibré holomorphe sur  $\Omega_\infty$ . Je considère leur restriction faisceautique au cercle unité  $\mathbf{S}$  et je note  $\mathcal{O}_{\mathbf{S}}$  le faisceau des germes sur  $\mathbf{S}$  de fonctions holomorphes de  $z$  (c'est aussi le faisceau des fonctions analytiques réelles sur  $\mathbf{S}$ ).

Une forme sesquilinéaire  $C : \mathcal{H}|_{\mathbf{S}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbf{S}}} \sigma^*\overline{\mathcal{H}}|_{\mathbf{S}} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{S}}$  est dite *non dégénérée* si elle définit un isomorphisme entre  $\mathcal{H}|_{\mathbf{S}}^\vee$  et  $\sigma^*\overline{\mathcal{H}}|_{\mathbf{S}}$ . Si telle est le cas, on peut construire par recollement un fibré  $\widetilde{\mathcal{H}}$  sur  $\mathbb{P}^1$ .

- Si ce fibré est trivial et si  $C$  est autoadjointe (relativement à l'involution  $\sigma^*$ ), je dirai que  $(\mathcal{H}, C)$  est une *structure de twisteur de poids 0*. Alors, en restreignant  $C$  aux sections globales  $H$  de  $\widetilde{\mathcal{H}}$ , on obtient une forme hermitienne  $h$  sur  $H$ .

- Si de plus  $h$  est définie positive, je dirai que  $(\mathcal{H}, C)$  est une structure de twisteur *polarisée* de poids 0.

**Intégrabilité.** Si de plus il existe une connexion méromorphe sur  $\mathcal{H}$  telle que

- $\nabla$  a un pôle d'ordre au plus 2 en  $z = 0$  et pas d'autre pôle,
- $\nabla$  est compatible à  $C$ , *i.e.*

$$z \frac{\partial}{\partial z} C(m', \sigma^* \overline{m''}) = C(z \nabla_{\partial_z} m', \sigma^* \overline{m''}) - C(m', \sigma^* \overline{z \nabla_{\partial_z} m''}),$$

alors on dit que la structure  $(\mathcal{H}, C)$  est *intégrable*.

La donnée de  $\nabla$  comme ci-dessus sur une structure de twisteur polarisable de poids 0  $(\mathcal{H}, C)$  équivaut à la donnée de deux endomorphismes  $U_0$  et  $Q$  de  $H$ , avec  $Q$  auto-adjoint pour  $h$ .

La matrice de  $z^2 \nabla_{\partial_z}$  dans la trivialisatation donnée par  $H$  est donnée par  $U_0 - zQ - z^2 U_\infty$ , où  $U_\infty$  est le  $h$ -adjoint de  $U_0$ .

## 2. Variation intégrable de structure de twisteur polarisée de poids 0

On considère maintenant une variété complexe  $M$ . Alors  $\mathcal{H}$  est un fibré holomorphe sur  $M \times \Omega_0$  et  $\sigma^* \overline{\mathcal{H}}$  est un fibré holomorphe sur  $\overline{M} \times \Omega_\infty$ . L'accouplement sesquilinéaire  $C$  prend ses valeurs dans  $\mathcal{C}_{M \times \Omega_0}^{\infty, \text{an}}$ .

La connexion méromorphe  $\nabla$  sur  $\mathcal{H}$  est à pôle le long de  $z = 0$ , de rang de Poincaré  $\leq 1$ . On suppose qu'elle est *plate*.

La condition imposée à ces données est que leur restriction à tout point de  $M$  définisse une structure intégrable de twisteur polarisée de poids 0.

En revenant à  $M$  (sections globales par rapport à  $\mathbb{P}^1$ ), on trouve de manière équivalente :

- un fibré  $C^\infty H$  sur  $M$ , muni d'une connexion plate  $D$  et d'une métrique  $h$ ,

- des endomorphismes  $U_0$  et  $Q$  de ce fibré ;

de plus,  $(H, D, h)$  est un fibré harmonique : la connexion plate  $D$  n'est pas associée à la métrique  $h$ , mais en est proche ; on peut écrire de manière unique  $D = D_E + \theta$ , où  $D_E$  est métrique (mais pas plate) et  $\theta$  est autoadjoint ; alors avec les conditions d'harmonicité,  $D_E''$  définit un fibré holomorphe  $E$  et  $\theta'$  est holomorphe pour cette structure (champ de Higgs) ; de même,  $U_0$  est holomorphe pour cette structure (mais  $Q$  est seulement  $h$ -autoadjoint) ; plus précisément, on a

$$(1) \quad \begin{cases} [\theta', U_0] = 0, \\ D_E''(U_0) = 0, \\ D_E'(U_0) - [\theta', Q] + \theta' = 0, \\ D_E'(Q) + [\theta', U_\infty] = 0, \end{cases}$$

**Remarque.** Comme  $Q$  est  $h$ -autoadjoint, il est semi-simple à valeurs propres réelles. Mais comme  $Q$  n'est pas  $D$ -horizontal, les valeurs propres dépendent du point de  $M$ . On peut montrer à l'aide de résultats de Corlette et Simpson que, si  $M$  est compacte kählérienne, alors les valeurs propres de  $Q$  sont constantes, et la décomposition de  $H$  en sous-espaces propres définit, avec la métrique  $h$ , une variation de structure de Hodge complexe polarisée de poids 0. Mais, dans le cas des variétés de Frobenius, on ne trouve jamais une variété compacte.

### 3. Structure $tt^*$

Soit  $M$  une variété complexe munie d'une structure de variété de Frobenius. On dispose donc sur  $\mathcal{H} = \pi^*TM$  d'une

connexion méromorphe plate  $\nabla$  qui est de rang de Poincaré  $\leq 1$  le long de  $z = 0$ .

Si on peut trouver  $C$  tel que  $(\mathcal{H}, \nabla, C)$  soit une variation intégrable de structure de twisteur polarisé de poids 0, on dit que la structure obtenue est une structure  $tt^*$ .

Sur l'espace  $TM$ , on a donc une métrique hermitienne  $h$ , et une forme bilinéaire non dégénérée plate  $g$ , dont la connexion de Levi-Civita  $\nabla$  est la partie  $(1, 0)$  de la connexion  $D$  considérée plus haut. En particulier, le fibré tangent  $TM$  est muni d'une structure réelle.

#### 4. Le cas des polynômes de Laurent

Soit  $f : (\mathbb{C}^*)^n \rightarrow \mathbb{C}$  un polynôme de Laurent commode et non dégénéré. La variété  $M$  est un voisinage de 0 dans l'espace vectoriel (quotient jacobien)  $Q_f = \mathbb{C}[u, u^{-1}]/(\partial f)$ .

On choisit une  $\mathbb{C}$ -base de  $Q_f$  et des relèvements  $\varphi_0 = 1, \varphi_1, \dots, \varphi_{\mu-1}$  dans  $\mathbb{C}[u, u^{-1}]$  ( $\mu = \dim_{\mathbb{C}} Q_f$ ) et on identifie  $M$  à un ouvert de  $\mathbb{C}^\mu$  muni de coordonnées  $x_0, \dots, x_{\mu-1}$ . On considère alors le déploiement universel  $F(u, x) = f(u) + \sum_{i=0}^{\mu-1} x_i \varphi_i(u)$ .

La structure de Frobenius provient d'une identification (application de période infinitésimale)  $TM \simeq Q_F$ , où  $Q_F = \mathcal{O}_M[u, u^{-1}]/(\partial_u F)$ . Plus précisément, on identifie  $\pi^*TM$  au réseau de Brieskorn de  $F$ .

Dans la suite, je vais faire la construction pour  $f$  afin simplifier l'exposé, *i.e.* je me restreint à  $x = 0$ . Je note  $U$  le tore  $(\mathbb{C}^*)^n$ . Alors

$$\text{Brieskorn}(f) = \Omega^n(U)[z]/(zd - df \wedge) \Omega^{n-1}(U)[z]$$

est un  $\mathbb{C}[z]$ -module libre de rang  $\mu$ . La connexion  $\nabla$  est donnée par la formule suivante, dans le cas où  $[\omega]$  est la classe d'une forme  $\omega \in \Omega^n(U)$  indépendante de  $z$  :

$$z^2 \nabla_{\partial_z} [\omega] = [f\omega].$$

On prend pour  $\mathcal{H}$  le fibré sur  $\Omega_0$  associé à Brieskorn( $f$ ), muni de la connexion  $\nabla$ , et on cherche un accouplement  $C$ . Alors que Brieskorn( $f$ ) est obtenu par une construction algébrique-analytique, la construction de  $C$  se fait de manière topologique.

Pour  $z \in \mathbf{S}$ , on sait identifier la fibre  $\mathcal{H}_z$  à l'espace vectoriel  $H_{\Phi_z}^n(U, \mathbb{C})$ , cohomologie de  $U$  à support dans la famille  $\Phi_z$  formée des fermés de  $U$  sur lesquels on a  $\text{Ré}(f(u_1, \dots, u_n))/z \leq c < 0$ .

Il existe un accouplement  $\mathbb{Q}$ -bilinéaire non dégénéré (dualité de Poincaré)

$$H_{\Phi_z}^n(U, \mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} H_{\Phi_{-z}}^n(U, \mathbb{Q}) \longrightarrow \mathbb{Q}$$

qui s'étend de manière sesquilinéaire en un accouplement non dégénéré

$$\widehat{P}_z : \mathcal{H}_z \otimes_{\mathbb{C}} \overline{\mathcal{H}}_{-z} \longrightarrow \mathbb{C}.$$

On remarque que, pour  $z \in \mathbf{S}$ , on a  $-z = \sigma(z)$ . On en déduit

$$\widehat{P} : \mathcal{H}_{|\mathbf{S}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbf{S}}} \sigma^* \overline{\mathcal{H}}_{\mathbf{S}} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{S}}.$$

**Théorème.** *Le triplet  $(\mathcal{H} = \text{Brieskorn}(f)^{\text{an}}, \nabla, \frac{(-1)^{n(n-1)/2}}{(2i\pi)^n} \widehat{P})$  est une structure intégrable de twisteur polarisée de poids 0.*

Les détails de la démonstration se trouvent dans [4].



La difficulté du théorème provient du fait que  $\widehat{P}$  est de nature topologique, alors que  $(\mathcal{H}, \nabla)$  est de nature algébrique-analytique. La situation est un peu analogue à celle de la théorie de Hodge sur une variété kählérienne compacte, où la polarisation de la partie primitive est induite par la dualité de Poincaré (topologique), et où la démonstration de la positivité passe par une interprétation en terme de formes harmoniques. Dans le théorème ci-dessus, on interprète  $H$  comme une cohomologie  $L^2$  pour pouvoir montrer la positivité.

### Références

- [1] A. DOUAI & C. SABBABH – « Gauss-Manin systems, Brieskorn lattices and Frobenius structures (I) », *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **53** (2003), no. 4, p. 1055–1116.
- [2] B. DUBROVIN – « Geometry and integrability of topological-antitopological fusion », *Comm. Math. Phys.* **152** (1993), p. 539–564.
- [3] C. HERTLING – «  $tt^*$  geometry, Frobenius manifolds, their connections, and the construction for singularities », *J. reine angew. Math.* **555** (2003), p. 77–161.
- [4] C. SABBABH – « Fourier-Laplace transform of a variation of polarized complex Hodge structure », arXiv : [math.AG/0508551](https://arxiv.org/abs/math/0508551), 36 pages, 2005.

---

15 mai 2006

C. SABBABH, UMR 7640 du CNRS, Centre de Mathématiques Laurent Schwartz,  
 École polytechnique, F-91128 Palaiseau cedex, France  
*E-mail* : [sabbah@math.polytechnique.fr](mailto:sabbah@math.polytechnique.fr)  
*Url* : <http://www.math.polytechnique.fr/~sabbah>