FAMILLES FINIES RIGIDES DE MATRICES INVERSIBLES

CAEN, 15 NOVEMBRE 2012

Claude Sabbah

Résumé. Peu de choses sont connues en général sur les familles finies de matrices inversibles, considérées à conjugaison près. Je considérerai le cas de familles irréductibles (sans sous-espace invariant commun) qui sont rigides. Je donnerai une version élémentaire de l'algorithme de N. Katz (1996), due à M. Dettweiler et S. Reiter (2000), qui permet de ramener ces familles à des familles finies de nombres complexes non nuls. Dans le cas particulier où les valeurs propres des matrices sont toutes de module égal à 1, je m'intéresserai à l'existence d'une forme hermitienne invariante et à sa signature. Cet aspect fait intervenir la théorie de Hodge et, de ce fait, l'analyse L^2 (Dettweiler-CS 2012).

1. Introduction

Je vais considérer des familles finies $(T_1, \dots, T_r)$ de matrices inversibles de taille $n \geqslant 1$, à équivalence près :

$$(T_1, \dots, T_r) \sim (T'_1, \dots, T'_r) \Longleftrightarrow \exists\, C \in \mathrm{GL}_n(\boldsymbol{k}),\ \forall\, i \in \{1, \dots, r\},\ T'_i = CT_iC^{-1}.$$

Il est temps de préciser que $\boldsymbol{k}$ est un corps. Si $\boldsymbol{k}$ est algébriquement clos et si $r = 1$, on classe les matrices à conjugaison près par la forme de Jordan. On se pose la question de trouver un analogue de la forme de Jordan simultanée pour $r \geqslant 2$ matrices inversibles. Posée comme cela, la question n'a pas de réponse connue. Elle est probablement mal posée. Je supposerai dans la suite que les matrices T_i n'ont pas de sous-espace invariant commun, et je dirai que la famille $(T_1, \dots, T_r)$ est *irréductible*. Il y a une différence entre les notions d'irréductibilité sur différentes extensions de $\boldsymbol{k}$. Par exemple, si $r = 1$ et $\boldsymbol{k}$ est algébriquement clos, la famille (T_1) est irréductible si et seulement si $n = 1$. Pour simplifier l'exposé, je vais supposer dans toute la suite que $\boldsymbol{k}$ *est algébriquement clos*, par exemple $\boldsymbol{k} = \mathbb{C}$. Mais il y a des applications à l'existence d'extensions de $\mathbb{Q}(x)$ de groupe de Galois donné où il ne faudrait pas faire cette hypothèse.

Échauffement avec les familles irréductibles. Commençons par un résultat dû à L. Scott.

***Théorème* (Scott, [Sco77]).** *Soit $r \geqslant 2$ et $(T_1, \dots, T_r)$ une famille irréductible avec $T_\infty := T_1 \cdots T_r = \mathrm{Id}$. Alors $\sum_{i=1}^r \mathrm{rg}(T_i - \mathrm{Id}) \geqslant 2n$.*

Démonstration. On considère les applications

$$\begin{aligned}\eta : \boldsymbol{k}^{rn} &\longrightarrow \boldsymbol{k}^{rn} \\ (u_1,\dots,u_r) &\longmapsto ((T_1-\mathrm{Id})u_1,\dots,(T_r-\mathrm{Id})u_r),\end{aligned} \qquad \varphi=\eta_{|\text{diagonale}} : \boldsymbol{k}^n \longrightarrow \boldsymbol{k}^{rn}$$

$$\begin{aligned}\psi : \operatorname{Im}\eta &\longrightarrow \boldsymbol{k}^n \\ (v_1,\dots,v_r) &\longmapsto v_1+T_1v_2+\cdots+T_1\cdots T_{r-1}v_r.\end{aligned}$$

On veut montrer que $\dim\operatorname{Im}\eta \geqslant 2n$. Pour cela, on va montrer que $\dim\operatorname{Ker}\psi\geqslant n$ et $\dim\operatorname{Im}\psi = n$.

D'une part, $\operatorname{Ker}\varphi=\bigcap_i\operatorname{Ker}(T_i-\mathrm{Id})$ est invariant sous les T_i, donc $\operatorname{Ker}\varphi=0$ par irréductibilité (et du fait que $r\geqslant 2$, au moins un des T_i est $\neq\mathrm{Id}$) et par suite $\dim\operatorname{Im}\varphi=n$. En utilisant l'identité

$$\mathrm{Id}-T_1\cdots T_r=(\mathrm{Id}-T_1)+T_1(\mathrm{Id}-T_2)+\cdots+T_1\cdots T_{r-1}(\mathrm{Id}-T_r),$$

on voit qu'un élément $((T_1-\mathrm{Id})u,\dots,(T_r-\mathrm{Id})u)$ de $\operatorname{Im}\varphi$ est dans le noyau de ψ, c'est-à-dire $\operatorname{Im}\varphi\subset\operatorname{Ker}\psi$, donc $\dim\operatorname{Ker}\psi\geqslant n$.

En utilisant un téléscopage, on a

$$\begin{aligned}(T_1-\mathrm{Id})u_1&+T_1(T_2-\mathrm{Id})u_2+\cdots+T_1\cdots T_{r-1}(T_r-\mathrm{Id})u_r\\ &=(T_1-\mathrm{Id})\Big[u_1+(T_2-\mathrm{Id})u_2+T_2(T_3-\mathrm{Id})u_3+\cdots+T_2\cdots T_{r-1}(T_r-\mathrm{Id})u_r\Big]\\ &\qquad+(T_2-1)\Big[u_2+(T_3-\mathrm{Id})u_3+\cdots+T_3\cdots T_{r-1}(T_r-\mathrm{Id})u_r\Big]\\ &\qquad+\cdots\\ &\qquad+(T_r-\mathrm{Id})u_r\end{aligned}$$

ce qui implique $\operatorname{Im}\psi=\sum\operatorname{Im}(T_i-\mathrm{Id})\subset\boldsymbol{k}^n$. Ce dernier espace est l'orthogonal de $\bigcap_i\operatorname{Ker}({}^tT_i-\mathrm{Id})$, donc $\operatorname{Im}\psi=\boldsymbol{k}^n$. □

Rigidité. Cette notion est définie en considérant la matrice $T_\infty:=(T_1\cdots T_r)^{-1}$. Si $(T_1,\dots,T_r)\sim(T'_1,\dots,T'_r)$, alors $(T_1,\dots,T_r,T_\infty)\sim(T'_1,\dots,T_r,T'_\infty))$.

Soit donc une famille $(T_1,\dots,T_r)$. On dit que cette famille est *rigide* si toute autre famille $(T'_1,\dots,T'_r)$ telle que T'_i soit conjuguée à T_i pour tout $i=1,\dots,r,\infty$ est équivalente à $(T_1,\dots,T_r)$. Autrement dit, si pour tout $i=1,\dots,r,\infty$ il existe C_i telle que $T'_i=C_iT_iC_i^{-1}$, alors il existe C telle que pour tout i on ait $T'_i=CT_iC^{-1}$.

Autrement dit, la famille $(T_1,\dots,T_r)$ est rigide si on ne peut pas déformer les T_i dans leur classe de conjugaison, sauf à conjuguer par une même matrice C. D'où l'appellation « rigide ».

L'exemple le plus simple est le cas où $n=1$, c'est-à-dire que les T_i sont des éléments de $\boldsymbol{k}^*$. La condition de rigidité est satisfaite de manière tautologique. Nous verrons que c'est « essentiellement » la seule situation possible.

Indice de rigidité. Comment détecter qu'une famille $(T_1, \ldots, T_r)$ est rigide ? Comment mesurer l'écart à la rigidité ? N. Katz [**Kat96**] a introduit une mesure, l'*indice de rigidité* défini comme suit :

$$\mathrm{rig}(T_1, \ldots, T_r) = \sum_{i=1}^{r} \dim Z(T_i) + \dim Z(T_\infty) - (r-1)n^2,$$

où $Z(T_i)$ est le centralisateur de T_i, c'est-à-dire l'espace des matrices qui commutent à T_i. Par exemple, si $n = 1$, on trouve $\mathrm{rig}(T_1, \ldots, T_r) = r+1-(r-1) = 2$. Nous admettrons le résultat suivant, dû à N. Katz.

Théorème. *Soit $(T_1, \ldots, T_r)$ une famille irréductible. Alors $\mathrm{rig}(T_1, \ldots, T_r)$ est un entier pair $\leqslant 2$, et $(T_1, \ldots, T_r)$ est rigide si et seulement si $\mathrm{rig}(T_1, \ldots, T_r) = 2$.*

2. Convolution intermédiaire

Pour $\lambda \in \boldsymbol{k}^*$, on associe à $(T_1, \ldots, T_r)$ la famille $(S_1^{(\lambda)}, \ldots, S_r^{(\lambda)})$ dans $\mathrm{GL}_{rn}(\boldsymbol{k})$:

$$S_i^{(\lambda)} = \begin{pmatrix} \mathrm{Id}_n & 0 & \ldots & & \ldots & \ldots & 0 \\ & \ddots & & & & & \\ T_1 - \mathrm{Id}_n & \ldots & \lambda T_i & & \lambda(T_{i+1} - \mathrm{Id}_n) & \ldots & \lambda(T_r - \mathrm{Id}_n) \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & \ddots & \\ 0 & & \ldots & & & & \mathrm{Id}_n \end{pmatrix}$$

et les deux sous-espaces de $\boldsymbol{k}^{rn}$

$$\mathscr{K} = \begin{pmatrix} \mathrm{Ker}(T_1 - \mathrm{Id}_n) \\ \vdots \\ \mathrm{Ker}(T_r - \mathrm{Id}_n) \end{pmatrix}, \qquad \mathscr{L}_\lambda = \bigcap_{i=1}^{r} \mathrm{Ker}(S_i^{(\lambda)} - \mathrm{Id}_{rn}).$$

Ces sous-espaces sont préservés sous l'action des $S_i^{(\lambda)}$, donc les $S_i^{(\lambda)}$ induisent des automorphismes de $\boldsymbol{k}^{rn}/(\mathscr{K} + \mathscr{L}_\lambda)$ que j'appellerai $T_i^{(\lambda)}$. Cette famille est appelée *convolée intermédiaire de* $(T_1, \ldots, T_r)$ *avec* λ, et notée $\mathrm{MC}_\lambda(T_1, \ldots, T_r)$ (M pour « middle », traduit par « intermédiaire », plutôt que par « moyenne », car il n'y a aucune moyenne ici). J'expliquerai plus loin pourquoi ceci ressemble à une opération de convolution.

Une (presque) évidence tout d'abord : *Si* $(T_1,\dots,T_r)\sim(T'_1,\dots,T'_r)$*, alors* $\mathrm{MC}_\lambda(T_1,\dots,T_r)\sim\mathrm{MC}_\lambda(T'_1,\dots,T'_r)$*.*

Quelques propriétés pour les familles irréductibles. On voudrait que cette opération de convolution soit multiplicative par rapport à λ, c'est-à-dire que $\mathrm{MC}_{\lambda_1}(\mathrm{MC}_{\lambda_2}(T_1,\dots,T_r))\sim\mathrm{MC}_{\lambda_1\lambda_2}(T_1,\dots,T_r)$. Commençons par considérer le cas $\lambda=1$, pour lequel on aimerait donc avoir $\mathrm{MC}_1(T_1,\dots,T_r)\sim(T_1,\dots,T_r)$.

Si $\lambda=1$, on voit que $\mathscr{L}_1=\mathrm{Ker}(T_1-\mathrm{Id}_n,\dots,T_r-\mathrm{Id}_n)$, où $(T_1-\mathrm{Id}_n,\dots,T_r-\mathrm{Id}_n)$ est considéré comme une application linéaire $\boldsymbol{k}^{rn}\to\boldsymbol{k}^n$. De plus, on a $\mathscr{K}\subset\mathscr{L}_1$. Pour avoir $\mathrm{MC}_1(T_1,\dots,T_r)\sim(T_1,\dots,T_r)$ il est donc nécessaire — et en fait suffisant — que $(T_1-\mathrm{Id}_n,\dots,T_r-\mathrm{Id}_n):\boldsymbol{k}^{rn}\to\boldsymbol{k}^n$ soit *surjective* (pour des raisons de dimension). Cette condition est réalisée dès que la famille $(T_1,\dots,T_r)$ est *irréductible*, comme on l'a déjà vu dans la démonstration du lemme de Scott.

Plus généralement on a :

Proposition. *Supposons la famille* $(T_1,\dots,T_r)$ *irréductible. Alors*

(1) *pour tout* $\lambda\in\boldsymbol{k}^*$*,* $\mathrm{MC}_\lambda(T_1,\dots,T_r)$ *est irréductible,*
(2) *pour tous* λ_1,λ_2*, on a* $\mathrm{MC}_{\lambda_1}(\mathrm{MC}_{\lambda_2}(T_1,\dots,T_r))\sim\mathrm{MC}_{\lambda_1\lambda_2}(T_1,\dots,T_r)$*,*
(3) *on a* $\mathrm{MC}_1(T_1,\dots,T_r)=(T_1,\dots,T_r)$*.*

La démonstration n'utilise que des outils standard d'algèbre linéaire et pourrait faire l'objet d'un problème d'agrégation (voir [**DR00**]). De la même manière, certains invariants sont reliés :

Proposition. *Supposons la famille* $(T_1,\dots,T_r)$ *irréductible. Alors*

(1) *pour* $i=1,\dots,r$*, on a* $\mathrm{rg}(T_i^{(\lambda)}-\mathrm{Id})=\mathrm{rg}(T_i-\mathrm{Id})$ *et* $T_i^{(\lambda)}$ *agissant sur* $\mathrm{Im}(T_i^{(\lambda)}-\mathrm{Id})$ *est équivalent à* λT_i *agissant sur* $\mathrm{Im}(T_i-\mathrm{Id})$*,*
(2) *on a* $\mathrm{rg}(\lambda T_\infty^{(\lambda)}-\mathrm{Id})=\mathrm{rg}(T_\infty-\lambda\,\mathrm{Id})$ *et* $\lambda T_\infty^{(\lambda)}-\mathrm{Id}$ *agissant sur* $\mathrm{Im}(\lambda T_\infty^{(\lambda)}-\mathrm{Id})$ *est équivalent à* $T_\infty-\lambda\,\mathrm{Id}$ *agissant sur* $\mathrm{Im}(T_\infty-\lambda\,\mathrm{Id})$

Démonstration. Voici l'idée de preuve pour le premier point, par exemple. Il est d'abord clair que $S_i^{(\lambda)}-\mathrm{Id}:\boldsymbol{k}^{rn}\to\boldsymbol{k}^{rn}$ a une image contenue dans le $i$ème facteur $\boldsymbol{k}^n$, et celle-ci est l'image de l'application $\boldsymbol{k}^{rn}\to\boldsymbol{k}^n$ de composantes

$$((T_i-\mathrm{Id}_n),\dots,(T_{i-1}-\mathrm{Id}_n),(\lambda T_i-\mathrm{Id}_n),\lambda(T_{i+1}-\mathrm{Id}_n),\dots,\lambda(T_r-\mathrm{Id}_n)).$$

L'hypothèse d'irréductibilité implique que cette application est surjective. Il reste à voir que l'application naturelle $(\boldsymbol{k}^n)_i\to\boldsymbol{k}^{rn}/(\mathscr{K}+\mathscr{L}_\lambda)$ a pour noyau $\mathrm{Ker}(T_i-\mathrm{Id})$, ce qu'on voit en regardant plus précisément comment est fait $\mathscr{L}_\lambda$. □

Corollaire. *Soit* $(T_1,\dots,T_r)$ *une famille irréductible. Alors pour tout* $\lambda\neq 0$*, on a* $\operatorname{rig}\mathrm{MC}_\lambda(T_1,\dots,T_r)=\operatorname{rig}(T_1,\dots,T_r)$.

De plus, si $T_\infty=\lambda_\infty\,\mathrm{Id}$ *et si on choisit* $\lambda=\lambda_\infty$*, on a* $T_\infty^{(\lambda_\infty)}=(1/\lambda_\infty)\,\mathrm{Id}$ *et la taille de* $\mathrm{MC}_{\lambda_\infty}(T_1,\dots,T_r)$ *est* $\sum_{i=1}^r\operatorname{rg}(T_i-\mathrm{Id})-n$.

Algorithme de Katz. Étant donné une famille irréductible, on dispose donc de deux types d'opérations qui préservent l'irréductibilité : les convolutions intermédiaires MC_λ (qui changent la dimension de l'espace ambiant, en général) et les homothéties (qui ne changent pas la dimension de l'espace ambiant) :

$$\mathrm{H}_{(\lambda_1,\dots,\lambda_r)}:(T_1,\dots,T_r)\longmapsto(\lambda_1T_1,\dots,\lambda_rT_r),\quad \lambda_i\in\boldsymbol{k}^*.$$

Ces opérations ne changent pas non plus l'indice de rigidité : c'est clair pour $\mathrm{H}_{(\lambda_1,\dots,\lambda_r)}$ et c'est le corollaire vu plus haut pour MC_λ.

***Théorème* (Algorithme de Katz, [Kat96]).** *Une famille irréductible* $(T_1,\dots,T_r)$ *avec* T_∞ *scalaire est rigide si et seulement si il existe une suite d'opérations* MC_λ *et* $\mathrm{H}_{(\lambda_1,\dots,\lambda_r)}$ *qui la ramènent à la famille triviale* $(1,\dots,1)$ *de taille* $n=1$.

Si T_∞ n'est pas scalaire, on remplace la famille de départ par la famille irréductible $(T_1,\dots,T_r,T_{r+1})$ avec $T_{r+1}:=T_\infty$, et on applique l'algorithme à cette famille.

Esquisse de l'algorithme. On suppose $n\geqslant 2$.

(1) On choisit une homothétie $\mathrm{H}_{(\lambda_1,\dots,\lambda_r)}$ telle qu'après cette homothétie, pour tout $i=1,\dots,r$, la valeur $\alpha=1$ de T_i réalise le minimum des rang de $T_i-\alpha\,\mathrm{Id}$.

(2) La condition $\operatorname{rig}(T_1,\dots,T_r)=2$ implique que $\sum_i\operatorname{rg}(T_i-\mathrm{Id})<2n$. Le théorème de Scott vu en échauffement implique alors que T_∞ (qui est scalaire) ne peut être égale à Id : $T_\infty=\lambda_\infty\,\mathrm{Id}$ avec $\lambda_\infty\neq 1$.

(3) On applique $\mathrm{MC}_{\lambda_\infty}$, et on obtient une famille irréductible de taille $<n$, avec $T_\infty^{(\lambda_\infty)}$ scalaire. □

Ce résultat peut être utilisé pour fabriquer des familles irréductibles rigides de taille $n>1$ qui sont intéressantes.

***Exemple* (G_2, [DR10]).** Pour $r=4$, en appliquant à la famille triviale $(1,1,1,1)$ de taille 1, la suite d'opérations ($\mathrm{j}=\sqrt[3]{1}$)

$$\begin{aligned}\mathrm{H}_{-1,1,\bar{\mathrm{j}},-\mathrm{j}}\circ\mathrm{MC}_{-\mathrm{j}}\circ\mathrm{H}_{1,-\bar{\mathrm{j}},-\mathrm{j},1}\circ\mathrm{MC}_{-\bar{\mathrm{j}}}\circ\mathrm{H}_{-1,1,-\mathrm{j},\bar{\mathrm{j}}}\circ\mathrm{MC}_{-1}\circ\\ \circ\,\mathrm{H}_{1,-\bar{\mathrm{j}},-\mathrm{j},1}\circ\mathrm{MC}_{-1}\circ\mathrm{H}_{1,-1,-1,1}\circ\mathrm{MC}_{-\mathrm{j}}\circ\mathrm{H}_{1,-1,-1,1}\circ\mathrm{MC}_{-\bar{\mathrm{j}}}\circ\mathrm{H}_{-1,-\bar{\mathrm{j}},-\bar{\mathrm{j}},-\bar{\mathrm{j}}},\end{aligned}$$

on obtient une famille irréductible rigide de taille 7, qui telle que l'adhérence de Zariski du groupe engendré dans GL_7 est le groupe G_2.

Intérêt pour Galois sur $\mathbb{Q}(x)$.

3. Formes hermitiennes

Je suppose maintenant que $\boldsymbol{k} = \mathbb{C}$. Je vais considérer la question suivante : *à quelle condition existe-t-il, pour une famille irréductible* $(T_1, \dots, T_r)$ *donnée, une forme hermitienne non dégénérée* h *telle que les* T_i *soient* h*-unitaires ?*

Commençons par remarquer qu'une telle forme, si elle existe (vue comme un isomorphisme $\mathbb{C}^n \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}^n$ transformant la famille des T_i en la famille des ${}^t\overline{T}_i^{-1}$) est unique à constante près à cause de l'irréductibilité, par le lemme de Schur.

Comportement des formes hermitiennes par convolution intermédiaires. Je note d'abord le comportement des trois opérations utiles par convolution intermédiaire.

- Transposition : $\mathrm{MC}_\lambda({}^tT_1, \dots, {}^tT_r) \sim ({}^tT_1^{(\lambda)}, \dots, {}^tT_r^{(\lambda)})$.
- Inversion : $\mathrm{MC}_{\lambda^{-1}}(T_1^{-1}, \dots, T_r^{-1}) \sim ((T_1^{(\lambda)})^{-1}, \dots, (T_r^{(\lambda)})^{-1})$.
- Conjugaison : $\mathrm{MC}_{\overline{\lambda}}(\overline{T}_1, \dots, \overline{T}_r) \sim (\overline{T_1^{(\lambda)}}, \dots, \overline{T_r^{(\lambda)}})$.
- Alors, si h (forme hermitienne non dégénérée h telle que chaque T_i soit h-unitaire) existe pour $(T_1, \dots, T_r)$ et si $|\lambda| = 1$, on peut définir une forme hermitienne non dégénérée $\mathrm{MC}_\lambda(h)$ pour laquelle les $T_i^{(\lambda)}$ sont unitaires. En effet, on écrit d'après les propriétés ci-dessus :

$$
\begin{aligned}
({}^t(\overline{T_1^{(\lambda)-1}}), \dots, {}^t(\overline{T_r^{(\lambda)-1}})) &\sim ({}^t(\overline{T}_1^{(\overline{\lambda})-1}), \dots, {}^t(\overline{T}_r^{(\overline{\lambda})-1})) \\
&\sim ({}^t(\overline{T}_1^{-1(\lambda)}), \dots, {}^t(\overline{T}_r^{-1(\lambda)})) \quad (\overline{\lambda}^{-1} = \lambda) \\
&\sim ({}^t\overline{T}_1^{-1(\lambda)}, \dots, {}^t\overline{T}_r^{-1(\lambda)}) \\
&\overset{h}{\sim} (T_1^{(\lambda)}, \dots, T_r^{(\lambda)}).
\end{aligned}
$$

On a en fait une formule explicite donnée dans [**DR00**, Cor. 2.9].

***Corollaire* (de l'algorithme de Katz).** *Si la famille* $(T_1, \dots, T_r)$ *est irréductible et rigide, une telle forme hermitienne non dégénérée existe si les valeurs propres des* T_i $(i = 1, \dots, r, \infty)$ *sont de module* 1.

Démonstration. Si les valeurs propres sont de module 1, on voit que les λ ou les $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ utilisés dans l'algorithme de Katz pour la famille $(T_1, \dots, T_r, T_{r+1})$ sont de module 1, puisque ce sont des monômes en les valeurs propres des T_i. L'existence, ou la non-existence, d'une telle forme hermitienne se propage donc tout le long de l'algorithme. Puisqu'à l'aboutissement $(1, \dots, 1)$ une telle forme existe de manière évidente, il en est de même au départ. □

On peut noter qu'à la fin de l'algorithme, la forme hermitienne est définie positive. Néanmoins, elle ne le reste pas tout au long de l'algorithme.

***Exemple* (G_2, suite).** Le sous-groupe $G_2(\mathbb{R}) \subset \mathrm{GL}_7(\mathbb{R})$ est le sous-groupe des matrices qui préservent une forme trilinéaire (forme de Dickson) et une forme bilinéaire non dégénérée de signature $(3,4)$. On peut en déduire que la forme hermitienne h de l'exemple G_2 doit aussi être de signature $(3,4)$.

Par conséquent, il n'est pas clair que la réciproque du corollaire soit vraie. Nous allons voir que la théorie de Hodge permet à la fois de calculer la signature et de préciser quand la réciproque est vraie.

4. Interprétation géométrique : théorie de Hodge

Pour faire apparaître la théorie de Hodge, il faut donner une interprétation géométrique au problème. Cette interprétation est en fait une des sources de l'intérêt pour les familles irréductibles de matrices inversibles. Il s'agit de la correspondance de Riemann-Hilbert.

Systèmes différentiels. On se donne r points $z_1, \ldots, z_r$ du plan complexe $\mathbb{C}$. Je vais considérer l'espace $\mathscr{O}$ des fonctions holomorphes sur $\mathbb{C} \smallsetminus \{z_1, \ldots, z_r\}$ et, sur $\mathscr{O}^n$, un système différentiel linéaire (connexion)

$$\begin{aligned} \nabla : \mathscr{O}^n &\longrightarrow \mathscr{O}^n \quad (\mathbb{C}\text{-linéaire}) \\ u(z) &\longmapsto u'(z) + \sum_{i=1}^{r} \frac{A_i}{z - z_i} \cdot u(z), \end{aligned}$$

pour certaines matrices constantes A_i de taille n. Le théorème de Cauchy assure l'existence *locale* des solutions du système différentiel $\nabla u(z) = 0$: sur tout disque centré D_{z_o}en $z_o \in \mathbb{C} \smallsetminus \{z_1, \ldots, z_r\}$ l'espace des solutions Sol_{z_o} est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n et on a un isomorphisme de restriction $\mathscr{O}(D_{z_o})$-linéaire $\mathscr{O}(D_{z_o})^n \to \mathscr{O}(D_{z_o}) \otimes_{\mathbb{C}} \mathrm{Sol}_{z_o}$ tel que ∇ sur le terme de gauche corresponde à la dérivation usuelle sur $\mathscr{O}(D_{z_o})$ sur le terme de droite (voir [**Car61**, Chap. VII]). D'autre part, par prolongement analytique le long d'un chemin entourant une fois z_i on obtient un automorphisme T_i de Sol_{z_o}. La *correspondance de Riemann-Hilbert* assure que toute famille $(T_1, \ldots, T_r)$ peut être obtenue de cette manière.

Une forme hermitienne non dégénérée h sur Sol_{z_o} compatible aux T_i induit alors une forme hermitienne non dégénérée $h : \mathscr{O}^n \otimes \overline{\mathscr{O}}^n \to \mathscr{C}^\infty$ qui satisfait aux propriétés :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} h(u(z), \overline{v(z)}) &= h(\nabla u(z), \overline{v(z)}), \\ \frac{\partial}{\partial \overline{z}} h(u(z), \overline{v(z)}) &= h(u(z), \overline{\nabla v(z)}). \end{aligned}$$

Structure de Hodge. Une structure de Hodge (complexe polarisée de poids 0) consiste en la donnée supplémentaire d'une décomposition C^∞ : $(\mathscr{C}^\infty)^n = \oplus_p H^p$ avec $H^p \simeq (\mathscr{C}^\infty)^{n_p}$ telle que :

(1) (compatibilité de ∇) : $F^p := \oplus_{p' \geqslant p} H^{p'}$ satisfait à $\nabla F^p \subset F^{p-1}$ et $\overline{\partial} F^p \subset F^p$,

(2) la décomposition est h-orthogonale (si on étend h de manière naturelle à $(\mathscr{C}^\infty)^n$),

(3) la restriction de h à H^p est définie $(-1)^p$-positive.

On voit que dans ce cas la signature de h sur le $\mathbb{C}$-espace vectoriel Sol_{z_o} est $(\sum_{p \text{ pair}} n_p, \sum_{p \text{ impair}} n_p)$.

Théorème. *Soit* $(T_1, \dots, T_r)$ *une famille irréductible.*

(1) *(Deligne* [**Del87**]*) Si* $(T_1, \dots, T_r)$ *admet une structure de Hodge complexe polarisée de poids* 0*, celle-ci est unique.*

(2) *(M. Saito* [**Sai11**]*) Dans ce cas, il en est de même de* $\mathrm{MC}_\lambda(T_1, \dots, T_r)$ *si* $|\lambda| = 1$*.*

(3) *(Dettweiler-CS* [**DS12**]*) Dans ce cas, on a des formules explicites pour calculer divers invariants de Hodge (dont les* n_p*) de* $\mathrm{MC}_\lambda(T_1, \dots, T_r)$ *en fonction de ceux de* $(T_1, \dots, T_r)$*.*

(4) *(Borel 1973 voir* [**Sch73**]*, Simpson* [**Sim90**]*) Si de plus* $(T_1, \dots, T_r)$ *est rigide, alors* $(T_1, \dots, T_r)$ *admet une structure de Hodge complexe polarisée de poids* 0 *si et seulement si les valeurs propres des* T_i *sont de module* 1*.*

Conclusion. Soit $(T_1, \dots, T_r)$ une famille irréductible et rigide. Supposons que les valeurs propres des T_i $(i = 1, \dots, r, \infty)$ soient de module 1. Comment calculer la signature de l'unique forme hermitienne h non dégénérée pour laquelle les T_i sont h-unitaires ?

- On explicite l'algorithme de Katz $(T_1, \dots, T_r) \rightsquigarrow (1, \dots, 1)$.
- On munit $(1, \dots, 1)$ de la structure de Hodge triviale.
- On calcule les invariants de Hodge, et donc la signature, dans l'algorithme pris dans l'autre sens $(1, \dots, 1) \rightsquigarrow (T_1, \dots, T_r)$.

Exemple **(G_2, *fin*).** On retrouve la signature déjà connue par ces calculs, et on peut même calculer les n_p.

Références

[Car61] H. Cartan – *Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes*, Hermann, Paris, 1961.

[Del87] P. Deligne – « Un théorème de finitude pour la monodromie », in *Discrete groups in geometry and analysis (New Haven, Conn., 1984)*, Progress in Math., vol. 67, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1987, p. 1–19.

[DR00] M. Dettweiler & S. Reiter – « An algorithm of Katz and its application to the inverse Galois problem », *J. Symbolic Comput.* **30** (2000), no. 6, p. 761–798.

[DR10] ______, « Rigid local systems and motives of type G_2 », *Compositio Math.* **146** (2010), no. 4, p. 929–963, With an appendix by Michael Dettweiler and Nicholas M. Katz.

[DS12] M. Dettweiler & C. Sabbah – « Hodge theory of the middle convolution », arXiv : `http://arxiv.org/abs/1209.4185`, 2012.

[Kat96] N. Katz – *Rigid local systems*, Ann. of Math. studies, vol. 139, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1996.

[Sai11] M. Saito – « Thom-Sebastiani Theorem for Hodge Modules », preprint, 1990 & 2011.

[Sch73] W. Schmid – « Variation of Hodge structure : the singularities of the period mapping », *Invent. Math.* **22** (1973), p. 211–319.

[Sco77] L. L. Scott – « Matrices and cohomology », *Ann. of Math. (2)* **105** (1977), no. 3, p. 473–492.

[Sim90] C. Simpson – « Harmonic bundles on noncompact curves », *J. Amer. Math. Soc.* **3** (1990), p. 713–770.

C. Sabbah, UMR 7640 du CNRS, Centre de Mathématiques Laurent Schwartz, École polytechnique, F–91128 Palaiseau cedex, France • *E-mail :* `sabbah@math.polytechnique.fr`
Url : `http://www.math.polytechnique.fr/~sabbah`