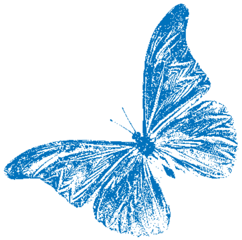
Familles finies rigides de matrices inversibles

Claude Sabbah



Centre de Mathématiques Laurent Schwartz

UMR 7640 du CNRS

École polytechnique, Palaiseau, France

Programme SEDIGA ANR-08-BLAN-0317-01

Introduction

Introduction

- $(T_1, \ldots, T_r)$ fam. finie, $T_i \in \mathrm{GL}_n(k)$.

Introduction

- $(T_1, \ldots, T_r)$ fam. finie, $T_i \in \mathrm{GL}_n(k)$.
- $(T_1, \ldots, T_r) \sim (T'_1, \ldots, T'_r) \iff$
  $\exists\, C \in \mathrm{GL}_n(k),\ \forall i \in \{1, \ldots, r\},\ T'_i = C T_i C^{-1}$.

Introduction

- $(T_1, \ldots, T_r)$ fam. finie, $T_i \in \mathrm{GL}_n(k)$.
- $(T_1, \ldots, T_r) \sim (T'_1, \ldots, T'_r) \iff$
  $\exists\, C \in \mathrm{GL}_n(k),\ \forall i \in \{1, \ldots, r\},\ T'_i = C T_i C^{-1}$.

DANS LA SUITE : k alg. clos.

Introduction

- $(T_1, \ldots, T_r)$ fam. finie, $T_i \in \mathrm{GL}_n(k)$.
- $(T_1, \ldots, T_r) \sim (T_1', \ldots, T_r') \iff$
  $\exists\, C \in \mathrm{GL}_n(k),\ \forall i \in \{1, \ldots, r\},\ T_i' = C T_i C^{-1}$.

DANS LA SUITE : k alg. clos.

DÉFINITION (irréductibilité) : $(T_1, \ldots, T_r)$ ***irréductible*** $\iff$
$\nexists$ ss-esp. non trivial invariant par tous les T_i.

Échauffement avec L. Scott

Échauffement avec L. Scott

THÉORÈME (L. Scott, 1977) : $(T_1, \ldots, T_r)$ famille irréd. avec $\boxed{T_1 \cdots T_r = \mathrm{Id}_n}$. Alors

$$\boxed{\sum_{i=1}^{r} \mathrm{rg}(T_i - \mathrm{Id}_n) \geqslant 2n}$$

Échauffement avec L. Scott

THÉORÈME (L. Scott, 1977) : $(T_1, \ldots, T_r)$ famille irréd. avec $\boxed{T_1 \cdots T_r = \mathrm{Id}_n}$. Alors

$$\boxed{\sum_{i=1}^{r} \mathrm{rg}(T_i - \mathrm{Id}_n) \geqslant 2n}$$

$$\begin{aligned} \eta : k^{rn} &\longrightarrow k^{rn} \\ (u_1, \ldots, u_r) &\longmapsto ((T_1 - \mathrm{Id}_n)u_1, \ldots, (T_r - \mathrm{Id}_n)u_r) \end{aligned}$$

À VOIR : $\dim \mathrm{Im}\, \eta \geqslant 2n$?

Échauffement avec L. Scott

THÉORÈME (L. Scott, 1977) : $(T_1, \ldots, T_r)$ famille irréd. avec $\boxed{T_1 \cdots T_r = \mathrm{Id}_n}$. Alors

$$\boxed{\sum_{i=1}^{r} \mathrm{rg}(T_i - \mathrm{Id}_n) \geqslant 2n}$$

$$\begin{aligned} \eta : k^{rn} &\longrightarrow k^{rn} \\ (u_1, \ldots, u_r) &\longmapsto ((T_1 - \mathrm{Id}_n)u_1, \ldots, (T_r - \mathrm{Id}_n)u_r) \end{aligned}$$

À VOIR : $\dim \mathrm{Im}\, \eta \geqslant 2n$?

$$\begin{aligned} \psi : \mathrm{Im}\, \eta &\longrightarrow k^n \\ (v_1, \ldots, v_r) &\longmapsto v_1 + T_1 v_2 + \cdots + T_1 \cdots T_{r-1} v_r \end{aligned}$$

À VOIR : $\dim \ker \psi \geqslant n$ et ψ surjective ?

Échauffement avec L. Scott

$$\begin{aligned} \psi : \operatorname{Im} \eta &\longrightarrow k^n \\ (v_1, \ldots, v_r) &\longmapsto v_1 + T_1 v_2 + \cdots + T_1 \cdots T_{r-1} v_r \end{aligned}$$

A VOIR : $\dim \ker \psi \geqslant n$ et ψ surjective.

Échauffement avec L. Scott

$$\begin{aligned} \psi : \operatorname{Im}\eta &\longrightarrow k^n \\ (v_1, \ldots, v_r) &\longmapsto v_1 + T_1 v_2 + \cdots + T_1 \cdots T_{r-1} v_r \end{aligned}$$

A VOIR : $\dim \ker \psi \geqslant n$ et ψ surjective.

- $\ker \psi \supset \{((T_1 - \mathrm{Id}_n)u, \ldots, (T_r - \mathrm{Id}_n)u) \mid u \in k^n\}$:

Échauffement avec L. Scott

$$\psi : \mathrm{Im}\,\eta \longrightarrow k^n$$
$$(v_1, \ldots, v_r) \longmapsto v_1 + T_1 v_2 + \cdots + T_1 \cdots T_{r-1} v_r$$

A VOIR : $\dim \ker \psi \geqslant n$ et ψ surjective.

- $\ker \psi \supset \{((T_1 - \mathrm{Id}_n)u, \ldots, (T_r - \mathrm{Id}_n)u) \mid u \in k^n\}$:

$0 = u - T_1 \cdots T_r u$
$= (\mathrm{Id} - T_1)u + T_1(\mathrm{Id} - T_2)u + \cdots + T_1 \cdots T_{r-1}(\mathrm{Id} - T_r)u$.

Échauffement avec L. Scott

$$\begin{aligned} \psi : \operatorname{Im}\eta &\longrightarrow k^n \\ (v_1,\ldots,v_r) &\longmapsto v_1 + T_1 v_2 + \cdots + T_1\cdots T_{r-1} v_r \end{aligned}$$

A VOIR : $\dim\ker\psi \geqslant n$ et ψ surjective.

- $\ker\psi \supset \{((T_1 - \mathrm{Id}_n)u, \ldots, (T_r - \mathrm{Id}_n)u) \mid u \in k^n\}$:

$$\begin{aligned} 0 &= u - T_1\cdots T_r u \\ &= (\mathrm{Id} - T_1)u + T_1(\mathrm{Id} - T_2)u + \cdots + T_1\cdots T_{r-1}(\mathrm{Id} - T_r)u. \end{aligned}$$

- $\operatorname{Im}\psi = \operatorname{Im}((T_1 - \mathrm{Id}_n)\bullet + \cdots + (T_r - \mathrm{Id}_n)\bullet) = k^n$:

Échauffement avec L. Scott

$$\psi : \mathrm{Im}\,\eta \longrightarrow k^n$$
$$(v_1, \ldots, v_r) \longmapsto v_1 + T_1 v_2 + \cdots + T_1 \cdots T_{r-1} v_r$$

A VOIR : $\dim \ker \psi \geqslant n$ et ψ surjective.

- $\ker \psi \supset \{((T_1 - \mathrm{Id}_n)u, \ldots, (T_r - \mathrm{Id}_n)u) \mid u \in k^n\}$:

$0 = u - T_1 \cdots T_r u$
$= (\mathrm{Id} - T_1)u + T_1(\mathrm{Id} - T_2)u + \cdots + T_1 \cdots T_{r-1}(\mathrm{Id} - T_r)u$.

- $\mathrm{Im}\,\psi = \mathrm{Im}((T_1 - \mathrm{Id}_n)\bullet + \cdots + (T_r - \mathrm{Id}_n)\bullet) = k^n$:

$(T_1 - \mathrm{Id})u_1 + T_1(T_2 - \mathrm{Id})u_2 + \cdots + T_1 \cdots T_{r-1}(T_r - \mathrm{Id})u_r$

Échauffement avec L. Scott

$$\begin{aligned}\psi : \operatorname{Im}\eta &\longrightarrow k^n\\ (v_1,\ldots,v_r) &\longmapsto v_1 + T_1v_2 + \cdots + T_1\cdots T_{r-1}v_r\end{aligned}$$

A VOIR : $\dim\ker\psi \geqslant n$ et ψ surjective.

- $\ker\psi \supset \{((T_1-\mathrm{Id}_n)u,\ldots,(T_r-\mathrm{Id}_n)u) \mid u\in k^n\}$:

$$\begin{aligned}0 &= u - T_1\cdots T_r u\\ &= (\mathrm{Id} - T_1)u + T_1(\mathrm{Id} - T_2)u + \cdots + T_1\cdots T_{r-1}(\mathrm{Id} - T_r)u.\end{aligned}$$

- $\operatorname{Im}\psi = \operatorname{Im}((T_1-\mathrm{Id}_n)\bullet + \cdots + (T_r-\mathrm{Id}_n)\bullet) = k^n$:

$$\begin{aligned}&(T_1-\mathrm{Id})u_1+T_1(T_2-\mathrm{Id})u_2+\cdots+T_1\cdots T_{r-1}(T_r-\mathrm{Id})u_r\\ &\quad= (T_1-\mathrm{Id})\left[u_1+(T_2-\mathrm{Id})u_2+T_2(T_3-\mathrm{Id})u_3+\cdots+T_2\cdots T_{r-1}\,(T_r-\mathrm{Id})u_r\right]\\ &\qquad+(T_2-1)\left[u_2+(T_3-\mathrm{Id})u_3+\cdots+T_3\cdots T_{r-1}\,(T_r-\mathrm{Id})u_r\right]\\ &\qquad+\cdots\\ &\qquad+(T_r-\mathrm{Id})u_r\end{aligned}$$

Rigidité

Rigidité

$(T_1, \ldots, T_r)$ donnée, on pose $T_\infty := (T_1 \cdots T_r)^{-1}$.

Rigidité

$(T_1, \ldots, T_r)$ donnée, on pose $T_\infty := (T_1 \cdots T_r)^{-1}$.

DÉFINITION (rigidité) :

$$(T_1, \ldots, T_r, [T_\infty]) \textit{ rigide} \iff \forall\, (T_1', \ldots, T_r', [T_\infty'])$$
$$T_i' = C_i T_i C_i^{-1} \;\forall\, i \Longrightarrow (T_1', \ldots, T_r') \sim (T_1, \ldots, T_r)$$

Rigidité

$(T_1,\ldots,T_r)$ donnée, on pose $T_\infty := (T_1\cdots T_r)^{-1}$.

DÉFINITION (rigidité) :

$$(T_1,\ldots,T_r,[T_\infty])\ \textit{rigide} \iff \forall\,(T'_1,\ldots,T'_r,[T'_\infty])$$

$$T'_i = C_i T_i C_i^{-1}\ \forall\, i \Longrightarrow (T'_1,\ldots,T'_r) \sim (T_1,\ldots,T_r)$$

DÉFINITION (indice de rigidité) :

$$\boxed{\mathrm{rig}(T_1,\ldots,T_r) := \sum_{i=1}^{r} \dim Z(T_i) + \dim Z(T_\infty) - (r-1)n^2}$$

Rigidité

$(T_1, \ldots, T_r)$ donnée, on pose $T_\infty := (T_1 \cdots T_r)^{-1}$.

DÉFINITION (rigidité) :

$$(T_1, \ldots, T_r, [T_\infty]) \text{ ***rigide*** } \iff \forall\, (T'_1, \ldots, T'_r, [T'_\infty])$$

$$T'_i = C_i T_i C_i^{-1} \;\forall\, i \Longrightarrow (T'_1, \ldots, T'_r) \sim (T_1, \ldots, T_r)$$

DÉFINITION (indice de rigidité) :

$$\boxed{\operatorname{rig}(T_1, \ldots, T_r) := \sum_{i=1}^{r} \dim Z(T_i) + \dim Z(T_\infty) - (r-1)n^2}$$

THÉORÈME (N. Katz 1996) : $(T_1, \ldots, T_r)$ ***irréductible***. Alors

- $\operatorname{rig}(T_1, \ldots, T_r) \leqslant 2$ et pair,
- $(T_1, \ldots, T_r)$ ***rigide*** $\iff \boxed{\operatorname{rig}(T_1, \ldots, T_r) = 2}$

Convolution intermédiaire

Convolution intermédiaire

$\lambda \in k^*$. $\quad (T_1, \ldots, T_r) \longmapsto (S_1^{(\lambda)}, \ldots, S_r^{(\lambda)})$:

Convolution intermédiaire

$\lambda \in k^*$. $\quad (T_1, \dots, T_r) \longmapsto (S_1^{(\lambda)}, \dots, S_r^{(\lambda)})$:

$$S_i^{(\lambda)} = \begin{pmatrix} \mathrm{Id}_n & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ & \ddots & & & & \\ T_1 - \mathrm{Id}_n & \dots & \lambda T_i & \lambda(T_{i+1} - \mathrm{Id}_n) & \dots & \lambda(T_r - \mathrm{Id}_n) \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & \dots & & & \mathrm{Id}_n \end{pmatrix}$$

Convolution intermédiaire

$\lambda \in k^*$. $\quad S_i^{(\lambda)} - \mathrm{Id}_{rn} : k^{rn} \to (k^n)_i$:

Convolution intermédiaire

$\lambda \in k^*$. $S_i^{(\lambda)} - \mathrm{Id}_{rn} : k^{rn} \to (k^n)_i$:

$$S_i^{(\lambda)} - \mathrm{Id}_{rn} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & & \dots & \dots & 0 \\ & \ddots & & & & & \\ T_1 - \mathrm{Id}_n & \dots & \lambda T_i - \mathrm{Id}_n & \lambda(T_{i+1} - \mathrm{Id}_n) & \dots & \lambda(T_r - \mathrm{Id}_n) \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & \ddots & & \\ 0 & & \dots & & & & 0 \end{pmatrix}$$

Convolution intermédiaire

$$\mathscr{K} = \begin{pmatrix} \ker(T_1 - \mathrm{Id}_n) \\ \vdots \\ \ker(T_r - \mathrm{Id}_n) \end{pmatrix}, \qquad \mathscr{L}_\lambda = \bigcap_{i=1}^{r} \ker(S_i^{(\lambda)} - \mathrm{Id}_{rn}).$$

Convolution intermédiaire

$$\mathscr{K} = \begin{pmatrix} \ker(T_1 - \mathrm{Id}_n) \\ \vdots \\ \ker(T_r - \mathrm{Id}_n) \end{pmatrix}, \qquad \mathscr{L}_\lambda = \bigcap_{i=1}^{r} \ker(S_i^{(\lambda)} - \mathrm{Id}_{rn}).$$

$$S_i^{(\lambda)}(\mathscr{K}) \subset \mathscr{K}, \quad S_i^{(\lambda)}(\mathscr{L}_\lambda) \subset \mathscr{L}_\lambda, \quad T_i^{(\lambda)} := S_i^{(\lambda)}{}_{|k^{rn}/(\mathscr{K}+\mathscr{L}_\lambda)}$$

Convolution intermédiaire

$$\mathscr{K} = \begin{pmatrix} \ker(T_1 - \mathrm{Id}_n) \\ \vdots \\ \ker(T_r - \mathrm{Id}_n) \end{pmatrix}, \qquad \mathscr{L}_\lambda = \bigcap_{i=1}^{r} \ker(S_i^{(\lambda)} - \mathrm{Id}_{rn}).$$

$$S_i^{(\lambda)}(\mathscr{K}) \subset \mathscr{K}, \quad S_i^{(\lambda)}(\mathscr{L}_\lambda) \subset \mathscr{L}_\lambda, \quad T_i^{(\lambda)} := S_i^{(\lambda)}{}_{|k^{rn}/(\mathscr{K}+\mathscr{L}_\lambda)}$$

DÉFINITION (convolution intermédiaire) :

$$\boxed{\mathrm{MC}_\lambda(T_1, \ldots, T_r) := \left(k^{rn}/(\mathscr{K} + \mathscr{L}_\lambda), T_1^{(\lambda)}, \ldots, T_r^{(\lambda)}\right)}$$

Convolution intermédiaire

$$\mathscr{K} = \begin{pmatrix} \ker(T_1 - \mathrm{Id}_n) \\ \vdots \\ \ker(T_r - \mathrm{Id}_n) \end{pmatrix}, \qquad \mathscr{L}_\lambda = \bigcap_{i=1}^{r} \ker(S_i^{(\lambda)} - \mathrm{Id}_{rn}).$$

$$S_i^{(\lambda)}(\mathscr{K}) \subset \mathscr{K}, \quad S_i^{(\lambda)}(\mathscr{L}_\lambda) \subset \mathscr{L}_\lambda, \quad T_i^{(\lambda)} := S_i^{(\lambda)}{}_{|k^{rn}/(\mathscr{K}+\mathscr{L}_\lambda)}$$

DÉFINITION (convolution intermédiaire) :

$$\boxed{\mathrm{MC}_\lambda(T_1, \ldots, T_r) := \left(k^{rn}/(\mathscr{K} + \mathscr{L}_\lambda), T_1^{(\lambda)}, \ldots, T_r^{(\lambda)}\right)}$$

REMARQUE : $(T_1, \ldots, T_r) \sim (T'_1, \ldots, T'_r) \Longrightarrow$

$$\mathrm{MC}_\lambda(T_1, \ldots, T_r) \sim \mathrm{MC}_\lambda(T'_1, \ldots, T'_r)$$

Convolution intermédiaire

$$\mathrm{MC}_{\boldsymbol{\lambda_1}}\left(\mathrm{MC}_{\boldsymbol{\lambda_2}}(\boldsymbol{T_1},\ldots,\boldsymbol{T_r})\right) \sim \mathrm{MC}_{\boldsymbol{\lambda_1\lambda_2}}(\boldsymbol{T_1},\ldots,\boldsymbol{T_r})\ ?$$

Convolution intermédiaire

$$\mathrm{MC}_{\lambda_1}\left(\mathrm{MC}_{\lambda_2}(T_1,\ldots,T_r)\right) \sim \mathrm{MC}_{\lambda_1\lambda_2}(T_1,\ldots,T_r)\ ?$$

$$\mathrm{MC}_1(T_1,\ldots,T_r) \sim (T_1,\ldots,T_r)\ ?$$

Convolution intermédiaire

$$\mathrm{MC}_{\lambda_1}\left(\mathrm{MC}_{\lambda_2}(T_1,\dots,T_r)\right) \sim \mathrm{MC}_{\lambda_1\lambda_2}(T_1,\dots,T_r)\ ?$$

$$\mathrm{MC}_1(T_1,\dots,T_r) \sim (T_1,\dots,T_r)\ ?$$

$\lambda = 1$

Convolution intermédiaire

$$\mathrm{MC}_{\lambda_1}\left(\mathrm{MC}_{\lambda_2}(T_1,\ldots,T_r)\right) \sim \mathrm{MC}_{\lambda_1\lambda_2}(T_1,\ldots,T_r)\ ?$$

$$\mathrm{MC}_1(T_1,\ldots,T_r) \sim (T_1,\ldots,T_r)\ ?$$

$$\lambda = 1 \Longrightarrow \mathscr{K} \subset \mathscr{L}_1 = \ker\left[(T_1-\mathrm{Id},\ldots,T_r-\mathrm{Id}) : k^{rn} \to k^n\right]$$

Convolution intermédiaire

$$\mathrm{MC}_{\boldsymbol{\lambda}_1}\left(\mathrm{MC}_{\boldsymbol{\lambda}_2}(T_1,\ldots,T_r)\right) \sim \mathrm{MC}_{\boldsymbol{\lambda}_1\boldsymbol{\lambda}_2}(T_1,\ldots,T_r)\ ?$$

$$\mathrm{MC}_1(T_1,\ldots,T_r) \sim (T_1,\ldots,T_r)\ ?$$

$$\boldsymbol{\lambda} = 1 \Longrightarrow \mathscr{K} \subset \mathscr{L}_1 = \ker\left[(T_1 - \mathrm{Id},\ldots,T_r - \mathrm{Id}) : k^{rn} \to k^n\right]$$

surjective

Convolution intermédiaire

$$\mathrm{MC}_{\lambda_1}\left(\mathrm{MC}_{\lambda_2}(T_1,\ldots,T_r)\right) \sim \mathrm{MC}_{\lambda_1\lambda_2}(T_1,\ldots,T_r)\ ?$$

$$\mathrm{MC}_1(T_1,\ldots,T_r) \sim (T_1,\ldots,T_r)\ ?$$

$$\lambda = 1 \Longrightarrow \mathscr{K} \subset \mathscr{L}_1 = \ker\left[(T_1-\mathrm{Id},\ldots,T_r-\mathrm{Id}) : k^{rn} \to k^n\right]$$

OK $\Longleftarrow$ ***surjective***

Convolution intermédiaire

$$\mathrm{MC}_{\lambda_1}\big(\mathrm{MC}_{\lambda_2}(T_1,\dots,T_r)\big) \sim \mathrm{MC}_{\lambda_1\lambda_2}(T_1,\dots,T_r)\ ?$$

$$\mathrm{MC}_1(T_1,\dots,T_r) \sim (T_1,\dots,T_r)\ ?$$

$$\lambda = 1 \Longrightarrow \mathscr{K} \subset \mathscr{L}_1 = \ker\left[(T_1-\mathrm{Id},\dots,T_r-\mathrm{Id}) : k^{rn} \to k^n\right]$$

OK $\Longleftarrow$ ***surjective***

$\Uparrow$

$(T_1,\dots,T_r)$ ***irréd.***

Convolution intermédiaire : cas irréd.

Convolution intermédiaire : cas irréd.

$(T_1, \ldots, T_r)$ ***irréductible***. Alors :

Convolution intermédiaire : cas irréd.

$(T_1, \ldots, T_r)$ ***irréductible***. Alors :

- $\forall\, \lambda \in k^*$, $\mathrm{MC}_\lambda(T_1, \ldots, T_r)$ ***irréductible***,

Convolution intermédiaire : cas irréd.

$(T_1, \ldots, T_r)$ ***irréductible***. Alors :

- $\forall\, \lambda \in k^*$, $\mathrm{MC}_\lambda(T_1, \ldots, T_r)$ ***irréductible***,
- $\forall\, \lambda_1, \lambda_2$,
  $\mathrm{MC}_{\lambda_1}(\mathrm{MC}_{\lambda_2}(T_1, \ldots, T_r)) \sim \mathrm{MC}_{\lambda_1\lambda_2}(T_1, \ldots, T_r)$,

Convolution intermédiaire : cas irréd.

$(T_1, \ldots, T_r)$ ***irréductible***. Alors :

- $\forall\, \lambda \in k^*$, $\mathrm{MC}_\lambda(T_1, \ldots, T_r)$ ***irréductible***,
- $\forall\, \lambda_1, \lambda_2$,
  $\mathrm{MC}_{\lambda_1}(\mathrm{MC}_{\lambda_2}(T_1, \ldots, T_r)) \sim \mathrm{MC}_{\lambda_1\lambda_2}(T_1, \ldots, T_r)$,
- $\mathrm{MC}_1(T_1, \ldots, T_r) \sim (T_1, \ldots, T_r)$.

Convolution intermédiaire : cas irréd.

$(T_1, \dots, T_r)$ ***irréductible***. Alors :

- $\forall\, \lambda \in k^*$, $\mathrm{MC}_\lambda(T_1, \dots, T_r)$ ***irréductible***,
- $\forall\, \lambda_1, \lambda_2$,
  $\mathrm{MC}_{\lambda_1}(\mathrm{MC}_{\lambda_2}(T_1, \dots, T_r)) \sim \mathrm{MC}_{\lambda_1\lambda_2}(T_1, \dots, T_r)$,
- $\mathrm{MC}_1(T_1, \dots, T_r) \sim (T_1, \dots, T_r)$.
- $\forall\, i = 1, \dots, r, \quad \mathrm{rg}(T_i^{(\lambda)} - \mathrm{Id}) = \mathrm{rg}(T_i - \mathrm{Id})$ et

$$\boxed{\begin{array}{ccc} \mathrm{Im}(T_i^{(\lambda)} - \mathrm{Id}) & \sim & \mathrm{Im}(T_i - \mathrm{Id}) \\ \circlearrowleft & & \circlearrowleft \\ T_i^{(\lambda)} & & \lambda T_i \end{array}}$$

Convolution intermédiaire : cas irréd.

$$\boldsymbol{k}^{\boldsymbol{rn}}/(\mathscr{K}+\mathscr{L}_{\boldsymbol{\lambda}}) \xrightarrow{\boldsymbol{T}_{\boldsymbol{i}}^{(\boldsymbol{\lambda})}-\mathbf{Id}} \boldsymbol{k}^{\boldsymbol{rn}}/(\mathscr{K}+\mathscr{L}_{\boldsymbol{\lambda}})$$

Convolution intermédiaire : cas irréd.

$$
\begin{tikzcd}
k^{rn} \arrow[r, two heads, "S_i^{(\lambda)}-\mathrm{Id}"] \arrow[d] & (k^n)_i \arrow[r, hook] & k^{rn} \arrow[d] \\
k^{rn}/(\mathscr{K}+\mathscr{L}_\lambda) \arrow[rr, "T_i^{(\lambda)}-\mathrm{Id}"] & & k^{rn}/(\mathscr{K}+\mathscr{L}_\lambda)
\end{tikzcd}
$$

Convolution intermédiaire : cas irréd.

$$
\begin{tikzcd}
 & (k^n)_i \arrow[r, hook] \arrow[dr] & k^{rn} \arrow[d] \\
k^{rn}/(\mathscr{K} + \mathscr{L}_\lambda) \arrow[rr, "T_i^{(\lambda)} - \mathrm{Id}"] & & k^{rn}/(\mathscr{K} + \mathscr{L}_\lambda)
\end{tikzcd}
$$

Convolution intermédiaire : cas irréd.

$$\begin{tikzcd}
 & (k^n)_i \arrow[r, hook] \arrow[dr, two heads] & & k^{rn} \arrow[dd] \\
 & & \mathrm{Im} \arrow[dr, hook] & \\
k^{rn}/(\mathscr{K}+\mathscr{L}_\lambda) \arrow[rrr, "T_i^{(\lambda)}-\mathrm{Id}"] & & & k^{rn}/(\mathscr{K}+\mathscr{L}_\lambda)
\end{tikzcd}$$

Convolution intermédiaire : cas irréd.

$$
\begin{tikzcd}
 & & (k^n)_i \arrow[dl, "T_i - \mathrm{Id}_n"'] \arrow[dr, two heads] \arrow[rr, hook] & & k^{rn} \arrow[dd] \\
 & k^n & & \mathrm{Im} \arrow[dr, hook] & \\
k^{rn}/(\mathscr{K} + \mathscr{L}_\lambda) \arrow[rrrr, "T_i^{(\lambda)} - \mathrm{Id}"] & & & & k^{rn}/(\mathscr{K} + \mathscr{L}_\lambda)
\end{tikzcd}
$$

Convolution intermédiaire : cas irréd.

$$
\begin{tikzcd}
 & \ker \arrow[rr, equal, "?"] \arrow[dr, hook] & & \ker(T_i - \mathrm{Id}_n) \arrow[dl, hook'] & \\
 & & (k^n)_i \arrow[rr, hook] \arrow[dl, "T_i - \mathrm{Id}_n"] \arrow[dr, two heads] & & k^{rn} \arrow[dd] \\
 & k^n & & \mathrm{Im} \arrow[dr, hook] & \\
k^{rn}/(\mathscr{K} + \mathscr{L}_\lambda) \arrow[rrrr, "T_i^{(\lambda)} - \mathrm{Id}"] & & & & k^{rn}/(\mathscr{K} + \mathscr{L}_\lambda)
\end{tikzcd}
$$

Convolution intermédiaire : cas irréd.

$$
\begin{tikzcd}
 & \ker \arrow[rr, equal, "?"] \arrow[dr, hook] & & \ker(T_i - \mathrm{Id}_n) \arrow[dl, hook'] & & \\
 & & (k^n)_i \arrow[rrr, hook] \arrow[dl, "T_i - \mathrm{Id}_n"] \arrow[drr, two heads] & & & k^{rn} \arrow[dd] \\
 & k^n & & & \mathrm{Im} \arrow[dr, hook] & \\
k^{rn}/(\mathscr{K} + \mathscr{L}_\lambda) \arrow[rrrrr, "T_i^{(\lambda)} - \mathrm{Id}"] & & & & & k^{rn}/(\mathscr{K} + \mathscr{L}_\lambda)
\end{tikzcd}
$$

$$? \iff (k^n)_i \cap (\mathscr{K} + \mathscr{L}_\lambda) = \ker(T_i - \mathrm{Id}_n).$$

Convolution intermédiaire : cas irréd.

$(T_1, \ldots, T_r)$ ***irréductible***. Alors :

- $\forall \lambda \in k^*$, $\mathrm{MC}_\lambda(T_1, \ldots, T_r)$ ***irréductible***,
- $\forall \lambda_1, \lambda_2$,
  $\mathrm{MC}_{\lambda_1}(\mathrm{MC}_{\lambda_2}(T_1, \ldots, T_r)) \sim \mathrm{MC}_{\lambda_1 \lambda_2}(T_1, \ldots, T_r)$,
- $\mathrm{MC}_1(T_1, \ldots, T_r) \sim (T_1, \ldots, T_r)$.
- $\forall i = 1, \ldots, r, \quad \mathrm{rg}(T_i^{(\lambda)} - \mathrm{Id}) = \mathrm{rg}(T_i - \mathrm{Id})$ et

$$\boxed{\begin{array}{ccc} \mathrm{Im}(T_i^{(\lambda)} - \mathrm{Id}) & \sim & \mathrm{Im}(T_i - \mathrm{Id}) \\ \circlearrowleft & & \circlearrowleft \\ T_i^{(\lambda)} & & \lambda T_i \end{array}}$$

Convolution intermédiaire : cas irréd.

- $\mathrm{rg}(\lambda T_\infty^{(\lambda)} - \mathrm{Id}) = \mathrm{rg}(T_\infty - \lambda\,\mathrm{Id})$ et propriétés analogues.

Convolution intermédiaire : cas irréd.

- $\mathbf{rg}(\boldsymbol{\lambda} T_\infty^{(\lambda)} - \mathbf{Id}) = \mathbf{rg}(T_\infty - \boldsymbol{\lambda}\,\mathbf{Id})$ et propriétés analogues.

- Alors, $\mathbf{rig}\,\mathrm{MC}_\lambda(T_1, \ldots, T_r) = \mathbf{rig}(T_1, \ldots, T_r)$.

Convolution intermédiaire : cas irréd.

- $\mathrm{rg}(\lambda T_\infty^{(\lambda)} - \mathrm{Id}) = \mathrm{rg}(T_\infty - \lambda\,\mathrm{Id})$ et propriétés analogues.
- Alors, $\mathrm{rig}\,\mathrm{MC}_\lambda(T_1, \ldots, T_r) = \mathrm{rig}(T_1, \ldots, T_r)$.
- $$T_\infty = \lambda_\infty \,\mathrm{Id} \text{ et } \lambda = \lambda_\infty$$
  $$\Downarrow$$
  $$T_\infty^{(\lambda_\infty)} = (1/\lambda_\infty)\,\mathrm{Id}$$
  et
  $$\text{taille } \mathrm{MC}_\lambda(T_1, \ldots, T_r) = \sum_{i=1}^r \mathrm{rg}(T_i - \mathrm{Id}_n) - n.$$

Algorithme de Katz

Algorithme de Katz

$(T_1, \ldots, T_r)$ famille irréductible.

Algorithme de Katz

$(T_1, \ldots, T_r)$ famille irréductible.

$$\mathrm{H}_{(\lambda_1,\ldots,\lambda_r)} : (T_1, \ldots, T_r) \longmapsto (\lambda_1 T_1, \ldots, \lambda_r T_r), \quad \lambda_i \in k^*.$$

Algorithme de Katz

$(T_1,\ldots,T_r)$ famille irréductible.

$$\mathrm{H}_{(\lambda_1,\ldots,\lambda_r)} : (T_1,\ldots,T_r) \longmapsto (\lambda_1 T_1,\ldots,\lambda_r T_r), \quad \lambda_i \in k^*.$$

MC_λ et $\mathrm{H}_{(\lambda_1,\ldots,\lambda_r)}$ préservent $\mathbf{rig}$.

Algorithme de Katz

$(T_1,\ldots,T_r)$ famille irréductible.

$$\mathrm{H}_{(\lambda_1,\ldots,\lambda_r)} : (T_1,\ldots,T_r) \longmapsto (\lambda_1 T_1,\ldots,\lambda_r T_r), \quad \lambda_i \in k^*.$$

MC_λ et $\mathrm{H}_{(\lambda_1,\ldots,\lambda_r)}$ préservent $\mathbf{rig}$.

THÉORÈME (N. Katz 1996) : $(T_1,\ldots,T_r)$ ***irréductible*** avec T_∞ ***scalaire*** est ***rigide*** $\Longleftrightarrow$ $\exists$ suite d'opérations MC_λ et $\mathrm{H}_{(\lambda_1,\ldots,\lambda_r)} \rightsquigarrow$ famille triviale $(1,\ldots,1)$ de taille $n=1$.

Algorithme de Katz

$(T_1, \ldots, T_r)$ famille irréductible.

$$\mathrm{H}_{(\lambda_1, \ldots, \lambda_r)} : (T_1, \ldots, T_r) \longmapsto (\lambda_1 T_1, \ldots, \lambda_r T_r), \quad \lambda_i \in k^*.$$

MC_λ et $\mathrm{H}_{(\lambda_1, \ldots, \lambda_r)}$ préservent rig.

THÉORÈME (N. Katz 1996) : $(T_1, \ldots, T_r)$ ***irréductible*** avec T_∞ ***scalaire*** est ***rigide*** $\iff$ $\exists$ suite d'opérations MC_λ et $\mathrm{H}_{(\lambda_1, \ldots, \lambda_r)}$ $\rightsquigarrow$ famille triviale $(1, \ldots, 1)$ de taille $n = 1$.

REMARQUE : Si T_∞ non scalaire, on remplace $(T_1, \ldots, T_r)$ par $(T_1, \ldots, T_r, T_{r+1})$ avec $T_{r+1} = (T_1 \cdots T_r)^{-1}$. Alors $(T_1, \ldots, T_r, T_{r+1})$ est aussi irréd. et rigide.

Algorithme de Katz : démonstration

Algorithme de Katz : démonstration

Si $n \geqslant 2$:

Algorithme de Katz : démonstration

Si $n \geqslant 2$:

1. $\exists\,(\lambda_1,\dots,\lambda_r)$ t.q. après $\mathrm{H}_{(\lambda_1,\dots,\lambda_r)}$, $\forall\, i = 1,\dots,r$, $\mathrm{rg}(T_i - \mathrm{Id}) = \min_\alpha \mathrm{rg}(T_i - \alpha\,\mathrm{Id})$.

Algorithme de Katz : démonstration

Si $n \geqslant 2$:

1. $\exists\,(\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$ t.q. après $\mathrm{H}_{(\lambda_1,\ldots,\lambda_r)}$, $\forall\, i = 1, \ldots, r$, $\mathrm{rg}(T_i - \mathrm{Id}) = \min_\alpha \mathrm{rg}(T_i - \alpha\,\mathrm{Id})$.
2. $\mathrm{rig}(T_1, \ldots, T_r) = 2 \Longrightarrow \sum_i \mathrm{rg}(T_i - \mathrm{Id}) < 2n$.

Algorithme de Katz : démonstration

Si $n \geqslant 2$:

1. $\exists\,(\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$ t.q. après $\mathrm{H}_{(\lambda_1,\ldots,\lambda_r)}$, $\forall\, i = 1, \ldots, r$, $\mathrm{rg}(T_i - \mathrm{Id}) = \min_\alpha \mathrm{rg}(T_i - \alpha\,\mathrm{Id})$.
2. $\mathrm{rig}(T_1, \ldots, T_r) = 2 \Longrightarrow \sum_i \mathrm{rg}(T_i - \mathrm{Id}) < 2n$.
3. Scott $\Longrightarrow T_\infty = \lambda_\infty\,\mathrm{Id}$ avec $\lambda_\infty \neq 1$.

Algorithme de Katz : démonstration

Si $n \geqslant 2$:

1. $\exists\,(\lambda_1,\ldots,\lambda_r)$ t.q. après $\mathrm{H}_{(\lambda_1,\ldots,\lambda_r)}$, $\forall\, i = 1,\ldots,r$, $\mathrm{rg}(T_i - \mathrm{Id}) = \min_\alpha \mathrm{rg}(T_i - \alpha\,\mathrm{Id})$.
2. $\mathrm{rig}(T_1,\ldots,T_r) = 2 \Longrightarrow \sum_i \mathrm{rg}(T_i - \mathrm{Id}) < 2n$.
3. Scott $\Longrightarrow T_\infty = \lambda_\infty\,\mathrm{Id}$ avec $\lambda_\infty \neq 1$.
4. On applique $\mathrm{MC}_{\lambda_\infty}$. $\rightsquigarrow$ fam. irréd. rigide, taille $< n$, avec $T_\infty^{(\lambda_\infty)}$ scalaire. $\square$

Algorithme de Katz : démonstration

Si $n \geqslant 2$:

1. $\exists\,(\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$ t.q. après $\mathrm{H}_{(\lambda_1,\ldots,\lambda_r)}$, $\forall\, i = 1, \ldots, r$, $\mathrm{rg}(T_i - \mathrm{Id}) = \min_\alpha \mathrm{rg}(T_i - \alpha\,\mathrm{Id})$.
2. $\mathrm{rig}(T_1, \ldots, T_r) = 2 \Longrightarrow \sum_i \mathrm{rg}(T_i - \mathrm{Id}) < 2n$.
3. Scott $\Longrightarrow T_\infty = \lambda_\infty\,\mathrm{Id}$ avec $\lambda_\infty \neq 1$.
4. On applique $\mathrm{MC}_{\lambda_\infty}$. $\rightsquigarrow$ fam. irréd. rigide, taille $< n$, avec $T_\infty^{(\lambda_\infty)}$ scalaire. $\square$

REMARQUE : Les $\mathrm{H}_{(\lambda_1,\ldots,\lambda_r)}$ et MC_λ utilisés tout au long de l'algo. sont t.q. $\lambda_1, \ldots, \lambda_r, \lambda$ sont des ***monômes*** en les v.p. de $T_1, \ldots, T_r, T_\infty$.

Exemple : G_2

Exemple : G_2

M. Dettweiler et S. Reiter ont classé les familles $T_1, \ldots, T_3 \in \mathrm{GL}_7(k)$ qui sont ***irréductibles***, ***rigides***, et t.q. Zar$\langle T_1, \ldots, T_3 \rangle = G_2(k) \subset \mathrm{GL}_7(k)$.

Exemple : G_2

M. Dettweiler et S. Reiter ont classé les familles $T_1, \ldots, T_3 \in \mathrm{GL}_7(k)$ qui sont ***irréductibles***, ***rigides***, et t.q. $\mathrm{Zar}\langle T_1, \ldots, T_3\rangle = G_2(k) \subset \mathrm{GL}_7(k)$.

Exemple : On applique à la famille triviale $(1, 1, 1)$ de taille 1 la suite d'opérations ($\mathrm{j} = \sqrt[3]{1}$)

$$\begin{aligned} &\mathrm{H}_{-1,1,\bar{\mathrm{j}}} \circ \mathrm{MC}_{-\mathrm{j}} \circ \mathrm{H}_{1,-\bar{\mathrm{j}},-\mathrm{j}} \circ \mathrm{MC}_{-\bar{\mathrm{j}}} \circ \mathrm{H}_{-1,1,-\mathrm{j}} \\ &\circ \mathrm{MC}_{-1} \circ \mathrm{H}_{1,-\bar{\mathrm{j}},-\mathrm{j}} \circ \mathrm{MC}_{-1} \circ \mathrm{H}_{1,-1,-1} \\ &\circ \mathrm{MC}_{-\mathrm{j}} \circ \mathrm{H}_{1,-1,-1} \circ \mathrm{MC}_{-\bar{\mathrm{j}}} \circ \mathrm{H}_{-1,-\bar{\mathrm{j}},-\bar{\mathrm{j}}} \end{aligned}$$

Formes hermitiennes

$k = \mathbb{C}$ et $(T_1, \ldots, T_r)$ ***irréductible***.

Formes hermitiennes

$k = \mathbb{C}$ et $(T_1, \ldots, T_r)$ ***irréductible***.

- Transposition : $\mathrm{MC}_\lambda({}^tT_1, \ldots, {}^tT_r) \sim ({}^tT_1^{(\lambda)}, \ldots, {}^tT_r^{(\lambda)})$.

Formes hermitiennes

$k = \mathbb{C}$ et $(T_1, \ldots, T_r)$ ***irréductible***.

- Transposition : $\mathrm{MC}_\lambda({}^tT_1, \ldots, {}^tT_r) \sim ({}^tT_1^{(\lambda)}, \ldots, {}^tT_r^{(\lambda)})$.
- Inversion :
  $\mathrm{MC}_{\lambda^{-1}}(T_1^{-1}, \ldots, T_r^{-1}) \sim ((T_1^{(\lambda)})^{-1}, \ldots, (T_r^{(\lambda)})^{-1})$.

Formes hermitiennes

$k = \mathbb{C}$ et $(T_1, \ldots, T_r)$ ***irréductible***.

- Transposition : $\mathrm{MC}_\lambda({}^tT_1, \ldots, {}^tT_r) \sim ({}^tT_1^{(\lambda)}, \ldots, {}^tT_r^{(\lambda)})$.
- Inversion :
  $\mathrm{MC}_{\lambda^{-1}}(T_1^{-1}, \ldots, T_r^{-1}) \sim ((T_1^{(\lambda)})^{-1}, \ldots, (T_r^{(\lambda)})^{-1})$.
- Conjugaison : $\mathrm{MC}_{\overline{\lambda}}(\overline{T}_1, \ldots, \overline{T}_r) \sim (\overline{T_1^{(\lambda)}}, \ldots, \overline{T_r^{(\lambda)}})$.

Formes hermitiennes

$k = \mathbb{C}$ et $(T_1, \ldots, T_r)$ ***irréductible***.

- Transposition : $\mathrm{MC}_\lambda({}^tT_1, \ldots, {}^tT_r) \sim ({}^tT_1^{(\lambda)}, \ldots, {}^tT_r^{(\lambda)})$.
- Inversion :
  $\mathrm{MC}_{\lambda^{-1}}(T_1^{-1}, \ldots, T_r^{-1}) \sim ((T_1^{(\lambda)})^{-1}, \ldots, (T_r^{(\lambda)})^{-1})$.
- Conjugaison : $\mathrm{MC}_{\overline{\lambda}}(\overline{T}_1, \ldots, \overline{T}_r) \sim (\overline{T_1^{(\lambda)}}, \ldots, \overline{T_r^{(\lambda)}})$.
- Soit h forme hermit. non dégén. t.q. T_i est h-***unitaire*** $\forall\, i$.
  ($\exists\, h \Longrightarrow \exists!\, h$).

Formes hermitiennes

$k = \mathbb{C}$ et $(T_1, \ldots, T_r)$ ***irréductible***.

- Transposition : $\mathrm{MC}_\lambda({}^tT_1, \ldots, {}^tT_r) \sim ({}^tT_1^{(\lambda)}, \ldots, {}^tT_r^{(\lambda)})$.
- Inversion :
  $\mathrm{MC}_{\lambda^{-1}}(T_1^{-1}, \ldots, T_r^{-1}) \sim ((T_1^{(\lambda)})^{-1}, \ldots, (T_r^{(\lambda)})^{-1})$.
- Conjugaison : $\mathrm{MC}_{\overline{\lambda}}(\overline{T}_1, \ldots, \overline{T}_r) \sim (\overline{T_1^{(\lambda)}}, \ldots, \overline{T_r^{(\lambda)}})$.
- Soit h forme hermit. non dégén. t.q. T_i est h-***unitaire*** $\forall\, i$. ($\exists\, h \implies \exists!\, h$).

  $|\lambda| = 1 \implies \exists\, \mathrm{MC}_\lambda(h)$ hermit. non dégén. t.q. les $T_i^{(\lambda)}$ $\mathrm{MC}_\lambda(h)$-unitaires.

  On a en fait une formule explicite.

Critère d'existence

$(T_1, \ldots, T_r)$ fam. ***irréductible*** et ***rigide***.

Critère d'existence

$(T_1, \ldots, T_r)$ fam. ***irréductible*** et ***rigide***.

HYPOTHÈSE : Les v.p. des T_i $(i = 1, \ldots, r, \infty)$ de module 1.

Critère d'existence

$(T_1, \ldots, T_r)$ fam. ***irréductible*** et ***rigide***.

HYPOTHÈSE : Les v.p. des T_i ($i = 1, \ldots, r, \infty$) de module 1.

- $\Longrightarrow$ ***Idem*** pour les $\mathrm{H}_{(\lambda_1,\ldots,\lambda_r)}$, les MC_λ et les $T_i^{(\lambda)}$ tout au long de l'algo. de Katz.

Critère d'existence

$(T_1, \ldots, T_r)$ fam. ***irréductible*** et ***rigide***.

HYPOTHÈSE : Les v.p. des T_i $(i = 1, \ldots, r, \infty)$ de module 1.

- $\Longrightarrow$ ***Idem*** pour les $\mathrm{H}_{(\lambda_1,\ldots,\lambda_r)}$, les MC_λ et les $T_i^{(\lambda)}$ tout au long de l'algo. de Katz.
- $\exists\, h$ pour $(1, \ldots, 1)$ ($=$ aboutissement de l'algo. de Katz).

Critère d'existence

$(T_1, \dots, T_r)$ fam. ***irréductible*** et ***rigide***.

HYPOTHÈSE : Les v.p. des T_i ($i = 1, \dots, r, \infty$) de module 1.

- $\Longrightarrow$ ***Idem*** pour les $\mathrm{H}_{(\lambda_1, \dots, \lambda_r)}$, les MC_λ et les $T_i^{(\lambda)}$ tout au long de l'algo. de Katz.
- $\exists\, h$ pour $(1, \dots, 1)$ ($=$ aboutissement de l'algo. de Katz).
- $\Longrightarrow \exists\, (!)\, h$ forme herm. non dégén. t.q. les T_i h-unitaires.

Critère d'existence

$(T_1, \ldots, T_r)$ fam. ***irréductible*** et ***rigide***.

HYPOTHÈSE : Les v.p. des T_i ($i = 1, \ldots, r, \infty$) de module 1.

- $\Longrightarrow$ ***Idem*** pour les $\mathrm{H}_{(\lambda_1, \ldots, \lambda_r)}$, les MC_λ et les $T_i^{(\lambda)}$ tout au long de l'algo. de Katz.
- $\exists\, h$ pour $(1, \ldots, 1)$ ($=$ aboutissement de l'algo. de Katz).
- $\Longrightarrow \exists\, (!)\, h$ forme herm. non dégén. t.q. les T_i h-unitaires.

Problème : Calculer $\mathrm{sgn}(h)$?

Exemple G_2 (suite)

$\boldsymbol{G_2(\mathbb{R}) \subset \mathrm{GL}_7(\mathbb{R})}$ sous-groupe des matrices qui préservent

- une forme trilinéaire (forme de Dickson) et
- une forme bilinéaire non dégénérée de signature $\mathbf{(3, 4)}$.

$\boldsymbol{T_1, \ldots, T_r}$ de l'exemple de Dettweiler-Reiter définies sur $\mathbb{R}$.
$\rightsquigarrow \mathbf{sgn}(\boldsymbol{h}) = \mathbf{(3, 4)}$.

Systèmes différentiels

Systèmes différentiels

$$\begin{cases} z_1, \ldots, z_r \in \mathbb{C}, \\ z_o \in \mathbb{C} \setminus \{z_1, \ldots, z_r\}, \\ D_{z_o} \subset \mathbb{C} \setminus \{z_1, \ldots, z_r\}, \end{cases} \qquad \mathscr{O} = \mathscr{O}(\mathbb{C} \setminus \{z_1, \ldots, z_r\}).$$

Systèmes différentiels

$$\begin{cases} z_1, \ldots, z_r \in \mathbb{C}, \\ z_o \in \mathbb{C} \smallsetminus \{z_1, \ldots, z_r\}, \\ D_{z_o} \subset \mathbb{C} \smallsetminus \{z_1, \ldots, z_r\}, \end{cases} \qquad \mathscr{O} = \mathscr{O}(\mathbb{C} \smallsetminus \{z_1, \ldots, z_r\}).$$

- Système différentiel linéaire (connexion)

$$\begin{aligned} \nabla : \mathscr{O}^n &\longrightarrow \mathscr{O}^n \quad (\mathbb{C}\text{-linéaire}) \\ u(z) &\longmapsto u'(z) + \sum_{i=1}^{r} \frac{A_i}{z - z_i} \cdot u(z) \quad (A_i \text{ matrice cste}), \end{aligned}$$

Systèmes différentiels

$$\begin{cases} z_1, \dots, z_r \in \mathbb{C}, \\ z_o \in \mathbb{C} \smallsetminus \{z_1, \dots, z_r\}, \\ D_{z_o} \subset \mathbb{C} \smallsetminus \{z_1, \dots, z_r\}, \end{cases} \qquad \mathscr{O} = \mathscr{O}(\mathbb{C} \smallsetminus \{z_1, \dots, z_r\}).$$

- Système différentiel linéaire (connexion)

$$\nabla : \mathscr{O}^n \longrightarrow \mathscr{O}^n \qquad (\mathbb{C}\text{-linéaire})$$

$$u(z) \longmapsto u'(z) + \sum_{i=1}^{r} \frac{A_i}{z - z_i} \cdot u(z) \quad (A_i \text{ matrice cste}),$$

- Sur D_{z_o}, Cauchy $\Longrightarrow$ Sol_{z_o} $\mathbb{C}$-esp. vect. dim. n et $(\mathscr{O}(D_{z_o})^n, \nabla) \xrightarrow{\sim} (\mathscr{O}(D_{z_o}) \otimes_{\mathbb{C}} \mathrm{Sol}_{z_o}, \mathrm{d})$.

Systèmes différentiels

$$\begin{cases} z_1, \dots, z_r \in \mathbb{C}, \\ z_o \in \mathbb{C} \smallsetminus \{z_1, \dots, z_r\}, \qquad \qquad \mathscr{O} = \mathscr{O}(\mathbb{C} \smallsetminus \{z_1, \dots, z_r\}). \\ D_{z_o} \subset \mathbb{C} \smallsetminus \{z_1, \dots, z_r\}, \end{cases}$$

- Système différentiel linéaire (connexion)

$$\nabla : \mathscr{O}^n \longrightarrow \mathscr{O}^n \quad (\mathbb{C}\text{-linéaire})$$
$$u(z) \longmapsto u'(z) + \sum_{i=1}^{r} \frac{A_i}{z - z_i} \cdot u(z) \quad (A_i \text{ matrice cste}),$$

- Sur D_{z_o}, Cauchy $\Longrightarrow$ Sol_{z_o} $\mathbb{C}$-esp. vect. dim. n et $(\mathscr{O}(D_{z_o})^n, \nabla) \xrightarrow{\sim} (\mathscr{O}(D_{z_o}) \otimes_{\mathbb{C}} \mathrm{Sol}_{z_o}, \mathrm{d})$.
- Prolong. analytique des sols $\Longrightarrow$ ***monodromie*** : $T_i : \mathrm{Sol}_{z_o} \to \mathrm{Sol}_{z_o}$.

Systèmes différentiels

$$\begin{cases} z_1, \dots, z_r \in \mathbb{C}, \\ z_o \in \mathbb{C} \smallsetminus \{z_1, \dots, z_r\}, \qquad\qquad \mathscr{O} = \mathscr{O}(\mathbb{C} \smallsetminus \{z_1, \dots, z_r\}). \\ D_{z_o} \subset \mathbb{C} \smallsetminus \{z_1, \dots, z_r\}, \end{cases}$$

- Système différentiel linéaire (connexion)

$$\nabla : \mathscr{O}^n \longrightarrow \mathscr{O}^n \quad (\mathbb{C}\text{-linéaire})$$

$$u(z) \longmapsto u'(z) + \sum_{i=1}^{r} \frac{A_i}{z - z_i} \cdot u(z) \quad (A_i \text{ matrice cste}),$$

- h herm. non dégén. sur Sol_{z_o} compatible aux T_i $\iff$ $h : \mathscr{O}^n \otimes \overline{\mathscr{O}}^n \to \mathscr{C}^\infty$ non dégén. t.q.

$$\frac{\partial}{\partial z} h(u(z), \overline{v(z)}) = h(\nabla u(z), \overline{v(z)}),$$

$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}} h(u(z), \overline{v(z)}) = h(u(z), \overline{\nabla v(z)}).$$

Structure de Hodge

Structure de Hodge

Structure de Hodge : donnée supplémentaire d'une décomp. C^∞ : $(\mathscr{C}^\infty)^n = \bigoplus_p H^p$ avec $H^p \simeq (\mathscr{C}^\infty)^{n_p}$ t.q. :

Structure de Hodge

Structure de Hodge : donnée supplémentaire d'une décomp. C^∞ : $(\mathscr{C}^\infty)^n = \bigoplus_p H^p$ avec $H^p \simeq (\mathscr{C}^\infty)^{n_p}$ t.q. :

- (compatib. de ∇) : $F^p := \bigoplus_{p' \geqslant p} H^{p'}$ satisfait à $\nabla F^p \subset F^{p-1}$ et $\overline{\partial} F^p \subset F^p$,

Structure de Hodge

Structure de Hodge : donnée supplémentaire d'une décomp. C^∞ : $(\mathscr{C}^\infty)^n = \bigoplus_p H^p$ avec $H^p \simeq (\mathscr{C}^\infty)^{n_p}$ t.q. :

- (compatib. de ∇) : $F^p := \bigoplus_{p' \geqslant p} H^{p'}$ satisfait à $\nabla F^p \subset F^{p-1}$ et $\overline{\partial} F^p \subset F^p$,
- la décomp. est h-orthogonale,

Structure de Hodge

Structure de Hodge : donnée supplémentaire d'une décomp. C^∞ : $(\mathscr{C}^\infty)^n = \bigoplus_p H^p$ avec $H^p \simeq (\mathscr{C}^\infty)^{n_p}$ t.q. :

- (compatib. de ∇) : $F^p := \bigoplus_{p' \geqslant p} H^{p'}$ satisfait à $\nabla F^p \subset F^{p-1}$ et $\overline{\partial} F^p \subset F^p$,
- la décomp. est h-orthogonale,
- la restr. de h à H^p est définie $(-1)^p$-positive.

Structure de Hodge

Structure de Hodge : donnée supplémentaire d'une décomp. C^∞ : $(\mathscr{C}^\infty)^n = \bigoplus_p H^p$ avec $H^p \simeq (\mathscr{C}^\infty)^{n_p}$ t.q. :

- (compatib. de ∇) : $F^p := \bigoplus_{p' \geqslant p} H^{p'}$ satisfait à $\nabla F^p \subset F^{p-1}$ et $\overline{\partial} F^p \subset F^p$,
- la décomp. est h-orthogonale,
- la restr. de h à H^p est définie $(-1)^p$-positive.

$\Longrightarrow$ Sur Sol_{z_o},

$$\boxed{\mathrm{sgn}(h) = \left(\sum_{p \text{ pair}} n_p, \sum_{p \text{ impair}} n_p\right)}$$

Structure de Hodge

Structure de Hodge : donnée supplémentaire d'une décomp. C^∞ : $(\mathscr{C}^\infty)^n = \bigoplus_p H^p$ avec $H^p \simeq (\mathscr{C}^\infty)^{n_p}$ t.q. :

- (compatib. de ∇) : $F^p := \bigoplus_{p' \geqslant p} H^{p'}$ satisfait à $\nabla F^p \subset F^{p-1}$ et $\overline{\partial} F^p \subset F^p$,
- la décomp. est h-orthogonale,
- la restr. de h à H^p est définie $(-1)^p$-positive.

$\Longrightarrow$ Sur Sol_{z_o},

$$\boxed{\mathrm{sgn}(h) = \left(\sum_{p \text{ pair}} n_p, \sum_{p \text{ impair}} n_p\right)}$$

Résultats sur les str. de Hodge

Résultats sur les str. de Hodge

$(T_1, \ldots, T_r)$ une famille ***irréductible***.

Résultats sur les str. de Hodge

$(T_1, \ldots, T_r)$ une famille ***irréductible***.

- (Deligne, 1984) : Si $(T_1, \ldots, T_r)$ admet une struct. de Hodge, elle est unique.

Résultats sur les str. de Hodge

$(T_1, \ldots, T_r)$ une famille ***irréductible***.

- (Deligne, 1984) : Si $(T_1, \ldots, T_r)$ admet une struct. de Hodge, elle est unique.
- (M. Saito 1990/2011) Dans ce cas, idem pour $\mathrm{MC}_\lambda(T_1, \ldots, T_r)$ si $|\lambda| = 1$.

Résultats sur les str. de Hodge

$(T_1, \ldots, T_r)$ une famille ***irréductible***.

- (Deligne, 1984) : Si $(T_1, \ldots, T_r)$ admet une struct. de Hodge, elle est unique.
- (M. Saito 1990/2011) Dans ce cas, idem pour $\mathrm{MC}_\lambda(T_1, \ldots, T_r)$ si $|\lambda| = 1$.
- (Dettweiler-CS 2012) Dans ce cas, formules explicites pour calculer les invariants de Hodge (dont les n_p) de $\mathrm{MC}_\lambda(T_1, \ldots, T_r)$ en fonction de ceux de $(T_1, \ldots, T_r)$.

Résultats sur les str. de Hodge

$(T_1, \ldots, T_r)$ une famille ***irréductible***.

- (Deligne, 1984) : Si $(T_1, \ldots, T_r)$ admet une struct. de Hodge, elle est unique.
- (M. Saito 1990/2011) Dans ce cas, idem pour $\mathrm{MC}_\lambda(T_1, \ldots, T_r)$ si $|\lambda| = 1$.
- (Dettweiler-CS 2012) Dans ce cas, formules explicites pour calculer les invariants de Hodge (dont les n_p) de $\mathrm{MC}_\lambda(T_1, \ldots, T_r)$ en fonction de ceux de $(T_1, \ldots, T_r)$.
- (Borel 1973, Simpson 1990) Si de plus $(T_1, \ldots, T_r)$ est ***rigide***, alors $(T_1, \ldots, T_r)$ admet une struct. de Hodge $\Longleftrightarrow$ les val. propres des T_i sont de module 1.

Conclusion

$(T_1, \ldots, T_r)$ fam. ***irréductible*** et ***rigide***.

Conclusion

$(T_1, \ldots, T_r)$ fam. ***irréductible*** et ***rigide***.

HYPOTHÈSE : Les v.p. des T_i ($i = 1, \ldots, r, \infty$) de module 1.

Conclusion

$(T_1, \ldots, T_r)$ fam. ***irréductible*** et ***rigide***.

HYPOTHÈSE : Les v.p. des T_i ($i = 1, \ldots, r, \infty$) de module 1.

$\Longrightarrow \exists! h$ forme herm. non dégén. t.q. les T_i h-unitaires.

Conclusion

$(T_1, \ldots, T_r)$ fam. ***irréductible*** et ***rigide***.

HYPOTHÈSE : Les v.p. des T_i ($i = 1, \ldots, r, \infty$) de module 1.

$\Longrightarrow \exists! h$ forme herm. non dégén. t.q. les T_i h-unitaires.

Calcul de $\mathrm{sgn}(h)$ ***?***

Conclusion

$(T_1, \ldots, T_r)$ fam. ***irréductible*** et ***rigide***.

HYPOTHÈSE : Les v.p. des T_i ($i = 1, \ldots, r, \infty$) de module 1.

$\Longrightarrow \exists! h$ forme herm. non dégén. t.q. les T_i h-unitaires.

Calcul de $\mathrm{sgn}(h)$ ***?***

- On explicite l'algo. de Katz $(T_1, \ldots, T_r) \rightsquigarrow (1, \ldots, 1)$.

Conclusion

$(T_1, \ldots, T_r)$ fam. ***irréductible*** et ***rigide***.

HYPOTHÈSE : Les v.p. des T_i ($i = 1, \ldots, r, \infty$) de module 1.

$\Longrightarrow$ $\exists! h$ forme herm. non dégén. t.q. les T_i h-unitaires.

Calcul de $\mathrm{sgn}(h)$ ***?***

- On explicite l'algo. de Katz $(T_1, \ldots, T_r) \rightsquigarrow (1, \ldots, 1)$.
- $(1, \ldots, 1)$ avec la struct. de Hodge triviale.

Conclusion

$(T_1, \ldots, T_r)$ fam. ***irréductible*** et ***rigide***.

HYPOTHÈSE : Les v.p. des T_i ($i = 1, \ldots, r, \infty$) de module 1.

$\Longrightarrow \exists! h$ forme herm. non dégén. t.q. les T_i h-unitaires.

Calcul de $\operatorname{sgn}(h)$ ***?***

- On explicite l'algo. de Katz $(T_1, \ldots, T_r) \rightsquigarrow (1, \ldots, 1)$.
- $(1, \ldots, 1)$ avec la struct. de Hodge triviale.
- Calcul des inv. de Hodge dans l'algo. pris dans l'autre sens $(1, \ldots, 1) \rightsquigarrow (T_1, \ldots, T_r)$.

Conclusion

$(T_1, \ldots, T_r)$ fam. ***irréductible*** et ***rigide***.

HYPOTHÈSE : Les v.p. des T_i ($i = 1, \ldots, r, \infty$) de module 1.

$\Longrightarrow$ $\exists! h$ forme herm. non dégén. t.q. les T_i h-unitaires.

Calcul de $\mathrm{sgn}(h)$ ***?***

- On explicite l'algo. de Katz $(T_1, \ldots, T_r) \rightsquigarrow (1, \ldots, 1)$.
- $(1, \ldots, 1)$ avec la struct. de Hodge triviale.
- Calcul des inv. de Hodge dans l'algo. pris dans l'autre sens $(1, \ldots, 1) \rightsquigarrow (T_1, \ldots, T_r)$.

$\Longrightarrow$ Calcul inductif de $\mathrm{sgn}(h)$ par l'algo. de Katz.