Théorie de Hodge et correspondance de Hitchin-Kobayashi sauvages

[d'après T. Mochizuki]

Claude Sabbah

Centre de Mathématiques Laurent Schwartz

UMR 7640 du CNRS

École polytechnique, Palaiseau, France

Programme SEDIGA ANR-08-BLAN-0317-01

Var. struct. de Hodge & sing. régulières

Var. struct. de Hodge & sing. régulières

- X: surf. de Riemann, $D \subset X$ fini, $j : X \smallsetminus D \hookrightarrow X$

Var. struct. de Hodge & sing. régulières

- X: surf. de Riemann, $D \subset X$ fini, $j : X \smallsetminus D \hookrightarrow X$
- Var. struct. Hodge polarisée sur $X^o := X \smallsetminus D$:

Var. struct. de Hodge & sing. régulières

- X: surf. de Riemann, $D \subset X$ fini, $j : X \setminus D \hookrightarrow X$
- Var. struct. Hodge polarisée sur $X^o := X \setminus D$:
  - V: fibré holom. sur X^o à conn. $\nabla : V \to \Omega^1_{X^o} \otimes V$

Var. struct. de Hodge & sing. régulières

- X: surf. de Riemann, $D \subset X$ fini, $j : X \smallsetminus D \hookrightarrow X$
- Var. struct. Hodge polarisée sur $X^o := X \smallsetminus D$:
  - V: fibré holom. sur X^o à conn. $\nabla : V \to \Omega^1_{X^o} \otimes V$
  - $F^\bullet V$: filtr. $\searrow$ par des sous-fibrés, $\nabla F^p \subset F^{p-1}$

Var. struct. de Hodge & sing. régulières

- X: surf. de Riemann, $D \subset X$ fini, $j : X \smallsetminus D \hookrightarrow X$
- Var. struct. Hodge polarisée sur $X^o := X \smallsetminus D$:
  - V: fibré holom. sur X^o à conn. $\nabla : V \to \Omega^1_{X^o} \otimes V$
  - $F^\bullet V$: filtr. $\searrow$ par des sous-fibrés, $\nabla F^p \subset F^{p-1}$
  - $\forall x \in X^o, \quad F^p V_x = \bigoplus_{p' \geqslant p} V_x^{p', w-p'}$

Var. struct. de Hodge & sing. régulières

- X: surf. de Riemann, $D \subset X$ fini, $j : X \setminus D \hookrightarrow X$
- Var. struct. Hodge polarisée sur $X^o := X \setminus D$:
  - V: fibré holom. sur X^o à conn. $\nabla : V \to \Omega^1_{X^o} \otimes V$
  - $F^\bullet V$: filtr. $\searrow$ par des sous-fibrés, $\nabla F^p \subset F^{p-1}$
  - $\forall x \in X^o, \quad F^p V_x = \bigoplus_{p' \geqslant p} V_x^{p', w-p'}$
  - Polarisation $\longrightarrow$ h: métrique hermitienne sur V

Var. struct. de Hodge & sing. régulières

- X: surf. de Riemann, $D \subset X$ fini, $j : X \smallsetminus D \hookrightarrow X$
- Var. struct. Hodge polarisée sur $X^o := X \smallsetminus D$:
  - V: fibré holom. sur X^o à conn. $\nabla : V \to \Omega^1_{X^o} \otimes V$
  - $F^\bullet V$: filtr. $\searrow$ par des sous-fibrés, $\nabla F^p \subset F^{p-1}$
  - $\forall x \in X^o, \quad F^p V_x = \bigoplus_{p' \geqslant p} V_x^{p', w-p'}$
  - Polarisation $\longrightarrow h$: métrique hermitienne sur V

THÉORÈME (Griffiths-Schmid 1973): $(j_* V)^{\mathrm{lb}}$: sect. de V de norme loc. bornée est un fibré holom. sur X et ∇ à pôles ***simples*** sur $(j_* V)^{\mathrm{lb}}$. $+$ Prolong. holom. de $F^p V$.

Var. struct. de Hodge & sing. régulières

- X: surf. de Riemann, $D \subset X$ fini, $j : X \smallsetminus D \hookrightarrow X$
- Var. struct. Hodge polarisée sur $X^o := X \smallsetminus D$:
  - V: fibré holom. sur X^o à conn. $\nabla : V \to \Omega^1_{X^o} \otimes V$
  - $F^\bullet V$: filtr. $\searrow$ par des sous-fibrés, $\nabla F^p \subset F^{p-1}$
  - $\forall x \in X^o, \quad F^p V_x = \bigoplus_{p' \geqslant p} V_x^{p', w-p'}$
  - Polarisation $\longrightarrow$ h: métrique hermitienne sur V

THÉORÈME (Griffiths-Schmid 1973): $(j_* V)^{\mathrm{lb}}$: sect. de V de norme loc. bornée est un fibré holom. sur X et ∇ à pôles ***simples*** sur $(j_* V)^{\mathrm{lb}}$. $+$ Prolong. holom. de $F^p V$.

THÉORÈME DE HODGE (Zucker 1979): X compacte $\Rightarrow$ struct. de Hodge pure polarisée sur $H^*(X, j_*(V^\nabla))$.

Var. struct. de Hodge & sing. régulières

- X: surf. de Riemann, $D \subset X$ fini, $j : X \smallsetminus D \hookrightarrow X$
- Var. struct. Hodge polarisée sur $X^o := X \smallsetminus D$:
  - V: fibré holom. sur X^o à conn. $\nabla : V \to \Omega^1_{X^o} \otimes V$
  - $F^\bullet V$: filtr. $\searrow$ par des sous-fibrés, $\nabla F^p \subset F^{p-1}$
  - $\forall x \in X^o, \quad F^p V_x = \bigoplus_{p' \geqslant p} V_x^{p', w-p'}$
  - Polarisation $\longrightarrow h$: métrique hermitienne sur V

THÉORÈME (Griffiths-Schmid 1973): $(j_* V)^{\mathrm{lb}}$: sect. de V de norme loc. bornée est un fibré holom. sur X et ∇ à pôles ***simples*** sur $(j_* V)^{\mathrm{lb}}$. + Prolong. holom. de $F^p V$.

THÉORÈME DE HODGE (Zucker 1979): X compacte $\Rightarrow$ struct. de Hodge pure polarisée sur $H^*(X, j_*(V^\nabla))$.

QUESTION: Existe-t-il une ***théorie de Hodge sauvage***, *i.e.*, $\longrightarrow \nabla$ à sing. ***irrégulières*** ($\Rightarrow$ pôles d'ordre $\geqslant 2$)?

Var. struct. de Hodge sauvage ?

QUESTION: Existe-t-il une ***théorie de Hodge sauvage***, *i.e.*, $\longrightarrow$ $\boldsymbol{\nabla}$ à sing. ***irrégulières*** ($\Rightarrow$ pôles d'ordre $\geqslant \mathbf{2}$)?

Var. struct. de Hodge sauvage ?

QUESTION: Existe-t-il une ***théorie de Hodge sauvage***, *i.e.*, $\longrightarrow \boldsymbol{\nabla}$ à sing. ***irrégulières*** ($\Rightarrow$ pôles d'ordre $\geqslant \mathbf{2}$)?

- MOTIVATION: $f : X \longrightarrow \mathbb{P}^1$ fonct. mérom. sur X.
  $D = f^{-1}(\infty)$. $(\mathscr{O}_X, \mathrm{d} + \mathrm{d}f\wedge)$.

Var. struct. de Hodge sauvage ?

QUESTION: Existe-t-il une ***théorie de Hodge sauvage***, *i.e.*, $\longrightarrow \nabla$ à sing. ***irrégulières*** ($\Rightarrow$ pôles d'ordre $\geqslant 2$)?

- MOTIVATION: $f : X \longrightarrow \mathbb{P}^1$ fonct. mérom. sur X. $D = f^{-1}(\infty)$. $(\mathscr{O}_X, \mathrm{d} + \mathrm{d}f\wedge)$. Struct. sur $H^*(X, f) := H^*\big(X, (\Omega_X^\bullet(*D), \mathrm{d} + \mathrm{d}f\wedge)\big)$?

Var. struct. de Hodge sauvage ?

QUESTION: Existe-t-il une ***théorie de Hodge sauvage***, *i.e.*, $\longrightarrow \nabla$ à sing. ***irrégulières*** ($\Rightarrow$ pôles d'ordre $\geqslant 2$)?

- MOTIVATION: $f : X \to \mathbb{P}^1$ fonct. mérom. sur X. $D = f^{-1}(\infty)$. $(\mathscr{O}_X, \mathrm{d} + \mathrm{d}f\wedge)$. Struct. sur $H^*(X, f) := H^*\big(\mathscr{O}_{\mathrm{alg}}(X^o) \xrightarrow[\mathrm{d}+\mathrm{d}f]{} \Omega^1_{\mathrm{alg}}(X^o)\big)$?

Var. struct. de Hodge sauvage ?

QUESTION: Existe-t-il une ***théorie de Hodge sauvage***, *i.e.*, $\longrightarrow \boldsymbol{\nabla}$ à sing. ***irrégulières*** ($\Rightarrow$ pôles d'ordre $\geqslant \mathbf{2}$)?

- MOTIVATION: $\boldsymbol{f} : \boldsymbol{X} \longrightarrow \mathbb{P}^1$ fonct. mérom. sur $\boldsymbol{X}$. $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{f}^{-1}(\infty)$. $(\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}}, \mathrm{d} + \mathrm{d}\boldsymbol{f}\wedge)$. Struct. sur $\boldsymbol{H}^*(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{f}) := \boldsymbol{H}^*\big(\mathscr{O}_{\mathbf{alg}}(\boldsymbol{X}^{\boldsymbol{o}}) \xrightarrow[\mathrm{d}+\mathrm{d}\boldsymbol{f}]{} \boldsymbol{\Omega}^{\mathbf{1}}_{\mathbf{alg}}(\boldsymbol{X}^{\boldsymbol{o}})\big)$?
- $\mathrm{d} + \mathrm{d}\boldsymbol{f}\wedge = \boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{f}} \circ \mathrm{d} \circ \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{f}} \Rightarrow \boldsymbol{H}^{\mathbf{0}} = \mathbf{0}$.

Var. struct. de Hodge sauvage ?

QUESTION: Existe-t-il une ***théorie de Hodge sauvage***, *i.e.*, $\longrightarrow \nabla$ à sing. ***irrégulières*** ($\Rightarrow$ pôles d'ordre $\geqslant 2$)?

- MOTIVATION: $f : X \to \mathbb{P}^1$ fonct. mérom. sur X. $D = f^{-1}(\infty)$. $(\mathscr{O}_X, \mathrm{d} + \mathrm{d}f\wedge)$. Struct. sur $H^*(X, f) := H^*\big(\mathscr{O}_{\mathrm{alg}}(X^o) \xrightarrow[\mathrm{d}+\mathrm{d}f]{} \Omega^1_{\mathrm{alg}}(X^o)\big)$?
- $\mathrm{d} + \mathrm{d}f\wedge = e^{-f} \circ \mathrm{d} \circ e^f \Rightarrow H^0 = 0$.
- Périodes exponentielles $\displaystyle\int_\Gamma e^f \omega$

Var. struct. de Hodge sauvage ?

QUESTION: Existe-t-il une ***théorie de Hodge sauvage***, *i.e.*, $\longrightarrow \nabla$ à sing. ***irrégulières*** ($\Rightarrow$ pôles d'ordre $\geqslant 2$)?

- MOTIVATION: $f : X \to \mathbb{P}^1$ fonct. mérom. sur X. $D = f^{-1}(\infty)$. $(\mathscr{O}_X, \mathrm{d} + \mathrm{d}f\wedge)$. Struct. sur $H^*(X, f) := H^*\big(\mathscr{O}_{\mathrm{alg}}(X^o) \xrightarrow[\mathrm{d}+\mathrm{d}f]{} \Omega^1_{\mathrm{alg}}(X^o)\big)$?
- $\mathrm{d} + \mathrm{d}f\wedge = e^{-f} \circ \mathrm{d} \circ e^f \Rightarrow H^0 = 0$.
- Périodes exponentielles $\displaystyle\int_\Gamma e^f \omega$
- EXEMPLE: $X = \mathbb{P}^1$, $f = -z^2$, $\omega = \mathrm{d}z$, $\Gamma = \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{-z^2} \mathrm{d}z = \pi^{1/2}$.

Var. struct. de Hodge sauvage ?

QUESTION: Existe-t-il une ***théorie de Hodge sauvage***, *i.e.*, $\to \nabla$ à sing. ***irrégulières*** ($\Rightarrow$ pôles d'ordre $\geqslant 2$)?

- MOTIVATION: $f : X \to \mathbb{P}^1$ fonct. mérom. sur X. $D = f^{-1}(\infty)$. $(\mathscr{O}_X, \mathrm{d} + \mathrm{d}f\wedge)$. Struct. sur $H^*(X, f) := H^*\big(\mathscr{O}_{\mathrm{alg}}(X^o) \xrightarrow[\mathrm{d}+\mathrm{d}f]{} \Omega^1_{\mathrm{alg}}(X^o)\big)$?
- $\mathrm{d} + \mathrm{d}f\wedge = e^{-f} \circ \mathrm{d} \circ e^f \Rightarrow H^0 = 0$.
- Périodes exponentielles $\displaystyle\int_\Gamma e^f \omega$
- EXEMPLE: $X = \mathbb{P}^1$, $f = -z^2$, $\omega = \mathrm{d}z$, $\Gamma = \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{-z^2}\mathrm{d}z = \pi^{1/2}$.
- Deligne (1984): filtr. de Hodge sur $H^1(X, f)$ avec exposants $\in \mathbb{Q}$ (ici $1/2$).

Sing. irrégulières (dim. 1)

Sing. irrégulières (dim. 1)

$\mathscr{V} = \mathbb{C}(\{z\})$-esp. vect., conn. $\boldsymbol{\nabla} = \mathrm{d} + \boldsymbol{A}\mathrm{d}\boldsymbol{z}$, $\boldsymbol{A} \in \mathrm{M}_{\boldsymbol{d}}(\mathbb{C}(\{\boldsymbol{z}\}))$

Sing. irrégulières (dim. 1)

$\mathscr{V} = \mathbb{C}(\{z\})$-esp. vect., conn. $\nabla = \mathrm{d} + A\mathrm{d}z$, $A \in \mathrm{M}_d(\mathbb{C}(\{z\}))$

$\widehat{\mathscr{V}} = \mathbb{C}((z)) \otimes \mathscr{V}$ avec conn. $\widehat{\nabla}$

Sing. irrégulières (dim. 1)

$\mathscr{V} = \mathbb{C}(\{z\})$-esp. vect., conn. $\boldsymbol{\nabla} = \mathrm{d} + A\mathrm{d}z$, $A \in \mathrm{M}_d(\mathbb{C}(\{z\}))$

$\widehat{\mathscr{V}} = \mathbb{C}((z)) \otimes \mathscr{V}$ avec conn. $\widehat{\boldsymbol{\nabla}}$

Levelt-Turrittin (sans ramif.): $\exists \widehat{P} \in \mathrm{GL}_d(\mathbb{C}((z)))$,

$$\boxed{\widehat{B} := \widehat{P}^{-1} A \widehat{P} + \widehat{P}^{-1} \widehat{P}'_z = \mathrm{diag}_{\mathfrak{a} \in \mathcal{A}}(\mathfrak{a}'_z \,\mathrm{Id} + C_{\mathfrak{a}}/z)}$$

Sing. irrégulières (dim. 1)

$\mathscr{V} = \mathbb{C}(\{z\})$-esp. vect., conn. $\nabla = \mathrm{d} + A\,\mathrm{d}z$, $A \in \mathrm{M}_d(\mathbb{C}(\{z\}))$

$\widehat{\mathscr{V}} = \mathbb{C}(\!(z)\!) \otimes \mathscr{V}$ avec conn. $\widehat{\nabla}$

Levelt-Turrittin (sans ramif.): $\exists \widehat{P} \in \mathrm{GL}_d(\mathbb{C}(\!(z)\!))$,

$$\boxed{\widehat{B} := \widehat{P}^{-1} A \widehat{P} + \widehat{P}^{-1} \widehat{P}'_z = \mathrm{diag}_{\mathfrak{a} \in \mathcal{A}}(\mathfrak{a}'_z \,\mathrm{Id} + C_{\mathfrak{a}}/z)}$$

$\mathfrak{a} \in \mathcal{A} \subset \mathbb{C}[1/z]$ sans terme cst, $C_{\mathfrak{a}}$ cste.

Sing. irrégulières (dim. 1)

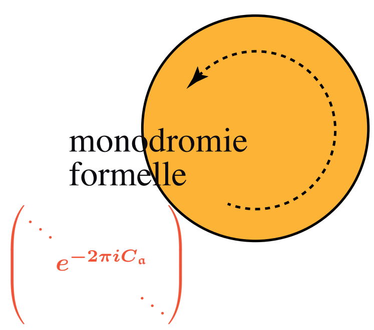
$\mathscr{V} = \mathbb{C}(\{z\})$-esp. vect., conn. $\nabla = \mathrm{d} + A\mathrm{d}z$, $A \in \mathrm{M}_d(\mathbb{C}(\{z\}))$

$\widehat{\mathscr{V}} = \mathbb{C}((z)) \otimes \mathscr{V}$ avec conn. $\widehat{\nabla}$

Levelt-Turrittin (sans ramif.): $\exists \widehat{P} \in \mathrm{GL}_d(\mathbb{C}((z)))$,

$$\boxed{\widehat{B} := \widehat{P}^{-1} A \widehat{P} + \widehat{P}^{-1} \widehat{P}'_z = \mathrm{diag}_{\mathfrak{a} \in \mathcal{A}} (\mathfrak{a}'_z \, \mathrm{Id} + C_{\mathfrak{a}}/z)}$$

$\mathfrak{a} \in \mathcal{A} \subset \mathbb{C}[1/z]$ sans terme cst, $C_{\mathfrak{a}}$ cste.



Sing. irrégulières (dim. 1)

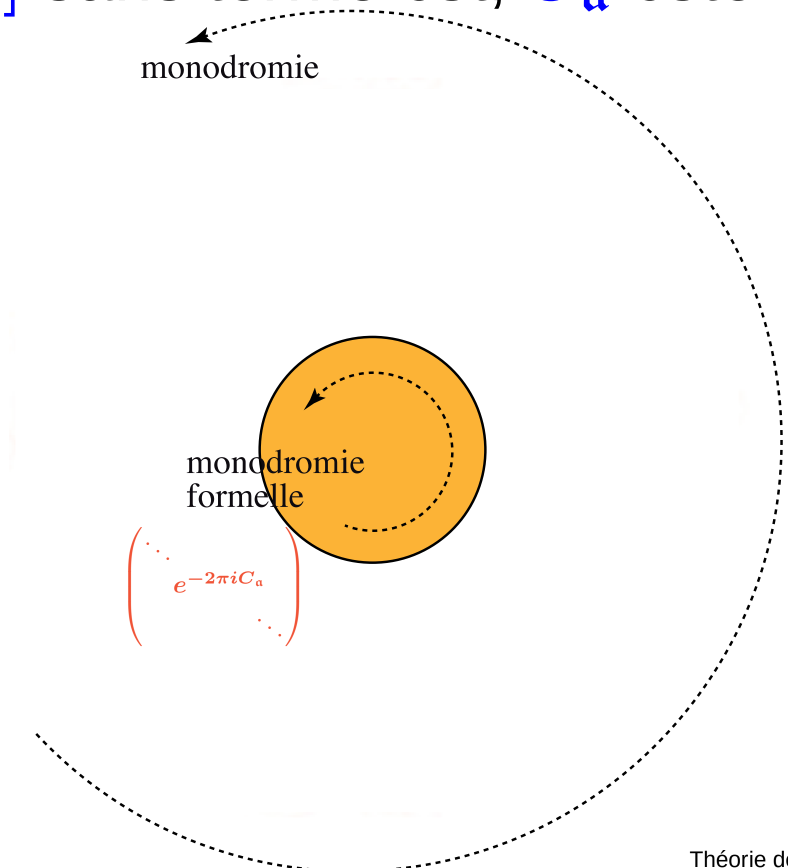
$\mathscr{V} = \mathbb{C}(\{z\})$-esp. vect., conn. $\nabla = \mathrm{d} + A\,\mathrm{d}z$, $A \in \mathrm{M}_d(\mathbb{C}(\{z\}))$

$\widehat{\mathscr{V}} = \mathbb{C}((z)) \otimes \mathscr{V}$ avec conn. $\widehat{\nabla}$

Levelt-Turrittin (sans ramif.): $\exists \widehat{P} \in \mathrm{GL}_d(\mathbb{C}((z)))$,

$$\boxed{\widehat{B} := \widehat{P}^{-1} A \widehat{P} + \widehat{P}^{-1} \widehat{P}'_z = \mathrm{diag}_{\mathfrak{a} \in \mathcal{A}} (\mathfrak{a}'_z \,\mathrm{Id} + C_{\mathfrak{a}}/z)}$$

$\mathfrak{a} \in \mathcal{A} \subset \mathbb{C}[1/z]$ sans terme cst, $C_{\mathfrak{a}}$ cste.



Sing. irrégulières (dim. 1)

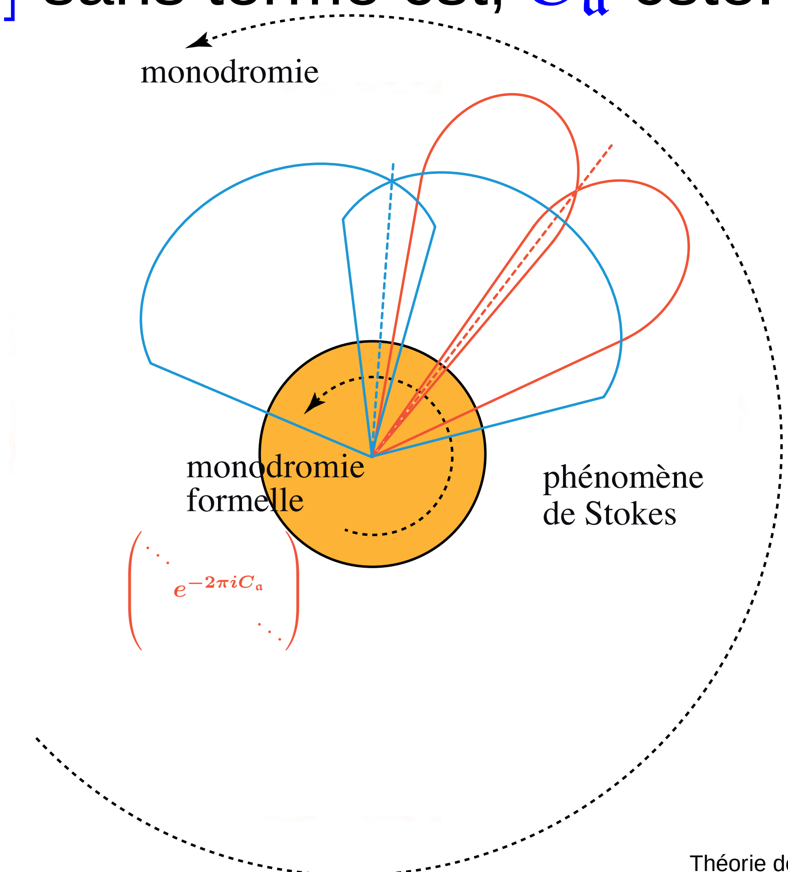
$\mathscr{V} = \mathbb{C}(\{z\})$-esp. vect., conn. $\nabla = \mathrm{d} + A\mathrm{d}z$, $A \in \mathrm{M}_d(\mathbb{C}(\{z\}))$

$\widehat{\mathscr{V}} = \mathbb{C}((z)) \otimes \mathscr{V}$ avec conn. $\widehat{\nabla}$

Levelt-Turrittin (sans ramif.): $\exists \widehat{P} \in \mathrm{GL}_d(\mathbb{C}((z)))$,

$$\boxed{\widehat{B} := \widehat{P}^{-1} A \widehat{P} + \widehat{P}^{-1} \widehat{P}'_z = \mathrm{diag}_{\mathfrak{a} \in \mathcal{A}}(\mathfrak{a}'_z \,\mathrm{Id} + C_{\mathfrak{a}}/z)}$$

$\mathfrak{a} \in \mathcal{A} \subset \mathbb{C}[1/z]$ sans terme cst, $C_{\mathfrak{a}}$ cste.



Sing. irrégulières (dim. 1)

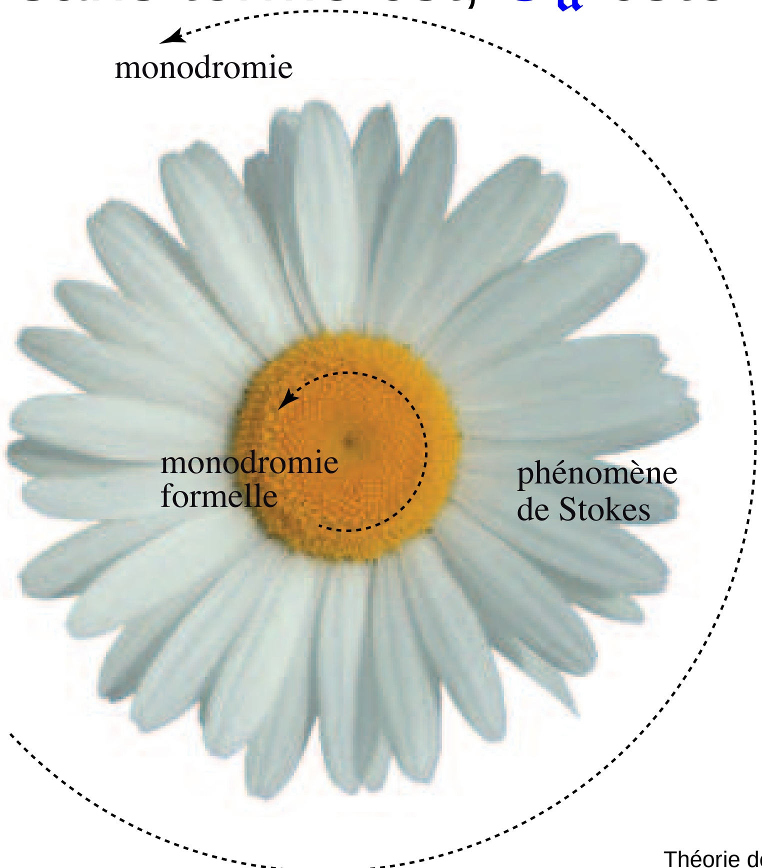
$\mathscr{V} = \mathbb{C}(\{z\})$-esp. vect., conn. $\nabla = \mathrm{d} + A\mathrm{d}z$, $A \in \mathrm{M}_d(\mathbb{C}(\{z\}))$

$\widehat{\mathscr{V}} = \mathbb{C}((z)) \otimes \mathscr{V}$ avec conn. $\widehat{\nabla}$

Levelt-Turrittin (sans ramif.): $\exists \widehat{P} \in \mathrm{GL}_d(\mathbb{C}((z)))$,

$$\boxed{\widehat{B} := \widehat{P}^{-1} A \widehat{P} + \widehat{P}^{-1} \widehat{P}'_z = \mathrm{diag}_{\mathfrak{a} \in \mathcal{A}} (\mathfrak{a}'_z \,\mathrm{Id} + C_{\mathfrak{a}}/z)}$$

$\mathfrak{a} \in \mathcal{A} \subset \mathbb{C}[1/z]$ sans terme cst, $C_{\mathfrak{a}}$ cste.



Sing. irrégulières (dim. $\geqslant 2$)

Sing. irrégulières (dim. $\geqslant 2$)

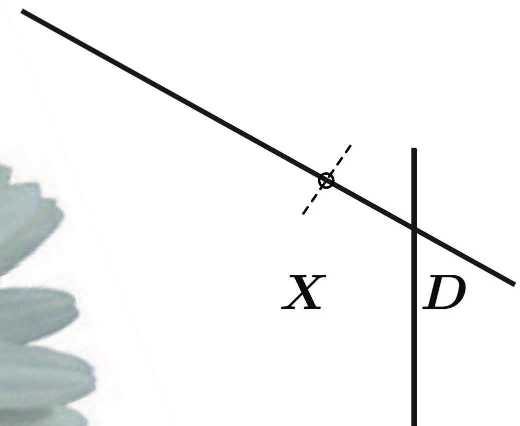
X: var cplxe, D: diviseur, $\mathscr{V} = \mathscr{O}_X(*D)$-mod. coh.

$\nabla : \mathscr{V} \to \Omega^1_X \otimes \mathscr{V}$: conn. mérom. ***intégrable*** ($\nabla^2 = 0$)

Sing. irrégulières (dim. $\geqslant 2$)

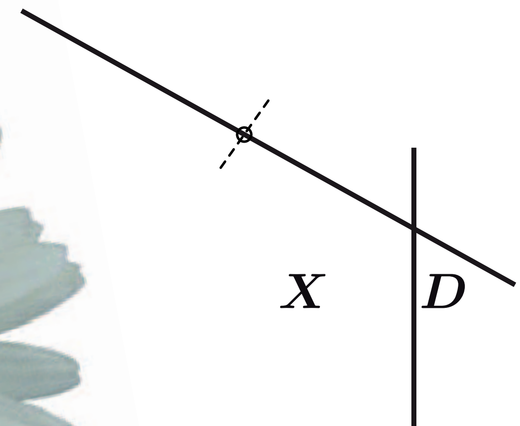
X: var cplxe, D: diviseur, $\mathscr{V} = \mathscr{O}_X(*D)$-mod. coh.

$\nabla : \mathscr{V} \to \Omega^1_X \otimes \mathscr{V}$: conn. mérom. ***intégrable*** ($\nabla^2 = 0$)



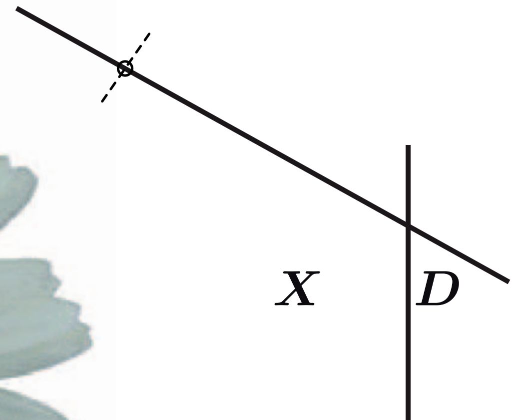
Sing. irrégulières (dim. $\geqslant 2$)

X: var cplxe, D: diviseur, $\mathscr{V} = \mathscr{O}_X(*D)$-mod. coh.
$\nabla : \mathscr{V} \to \Omega_X^1 \otimes \mathscr{V}$: conn. mérom. ***intégrable*** ($\nabla^2 = 0$)



Sing. irrégulières (dim. $\geqslant 2$)

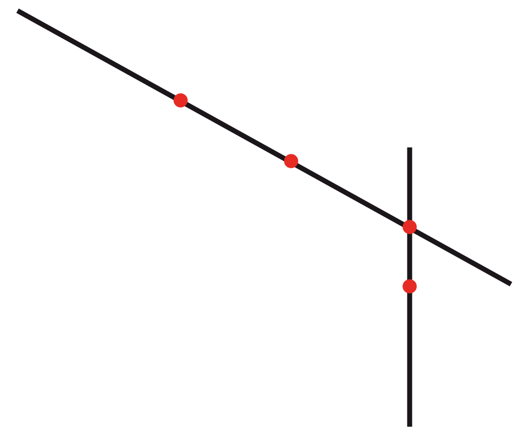
X: var cplxe, D: diviseur, $\mathscr{V} = \mathscr{O}_X(*D)$-mod. coh.
$\nabla : \mathscr{V} \to \Omega^1_X \otimes \mathscr{V}$: conn. mérom. ***intégrable*** ($\nabla^2 = 0$)



Sing. irrégulières (dim. $\geqslant 2$)

$\boldsymbol{X}$: var cplxe, $\boldsymbol{D}$: diviseur, $\mathscr{V} = \mathscr{O}_{\boldsymbol{X}}(*\boldsymbol{D})$-mod. coh.

$\boldsymbol{\nabla} : \mathscr{V} \to \boldsymbol{\Omega}^{\mathbf{1}}_{\boldsymbol{X}} \otimes \mathscr{V}$: conn. mérom. ***intégrable*** ($\boldsymbol{\nabla}^{\mathbf{2}} = \mathbf{0}$)



Sing. irrégulières (dim. $\geqslant 2$)

X: var cplxe, D: diviseur, $\mathscr{V} = \mathscr{O}_X(*D)$-mod. coh.
$\nabla : \mathscr{V} \to \Omega^1_X \otimes \mathscr{V}$: conn. mérom. ***intégrable*** ($\nabla^2 = 0$)

THÉORÈME LEVELT-TURRITTIN EN DIM. $\geqslant 2$ (TH. 3.3) (Mochizuki, Kedlaya):

Sing. irrégulières (dim. $\geqslant 2$)

X: var cplxe, D: diviseur, $\mathscr{V} = \mathscr{O}_X(*D)$-mod. coh.
$\nabla : \mathscr{V} \to \Omega^1_X \otimes \mathscr{V}$: conn. mérom. ***intégrable*** ($\nabla^2 = 0$)

THÉORÈME LEVELT-TURRITTIN EN DIM. $\geqslant 2$ (TH. 3.3) (Mochizuki, Kedlaya): X projective lisse. $\exists\, \pi : X' \to X$ modif. projective t.q. $D' := \pi^{-1}(D) =$ DCN

Sing. irrégulières (dim. $\geqslant 2$)

X: var cplxe, D: diviseur, $\mathscr{V} = \mathscr{O}_X(*D)$-mod. coh.
$\nabla : \mathscr{V} \to \Omega_X^1 \otimes \mathscr{V}$: conn. mérom. ***intégrable*** ($\nabla^2 = 0$)

THÉORÈME LEVELT-TURRITTIN EN DIM. $\geqslant 2$ (TH. 3.3) (Mochizuki, Kedlaya): X projective lisse. $\exists\ \pi : X' \to X$ modif. projective t.q. $D' := \pi^{-1}(D) =$ DCN et $\pi^*(\mathscr{V}, \nabla)$ ***sans point tournant***:

Sing. irrégulières (dim. $\geqslant 2$)

X: var cplxe, D: diviseur, $\mathscr{V} = \mathscr{O}_X(*D)$-mod. coh.
$\nabla : \mathscr{V} \to \Omega^1_X \otimes \mathscr{V}$: conn. mérom. ***intégrable*** ($\nabla^2 = 0$)

THÉORÈME LEVELT-TURRITTIN EN DIM. $\geqslant 2$ (TH. 3.3) (Mochizuki, Kedlaya): X projective lisse. $\exists\, \pi : X' \to X$ modif. projective t.q. $D' := \pi^{-1}(D) =$ DCN et $\pi^*(\mathscr{V}, \nabla)$ ***sans point tournant***: $\forall x' \in D'$, $\quad \exists \widehat{P} \in \mathrm{GL}_d(\mathscr{O}_{\widehat{x}'}(*D'))$,

$$\boxed{\widehat{P}^{-1}\widehat{\nabla}\widehat{P} \underset{\text{mod. ramif.}}{=} \mathrm{d} + \mathrm{diag}_{\mathfrak{a}\in \mathrm{Irr}_{x'}(\nabla)}\Big(\mathrm{d}\mathfrak{a}\,\mathrm{Id} + \textstyle\sum_i C_{\mathfrak{a},i}\dfrac{dz_i}{z_i}\Big)}$$

Sing. irrégulières (dim. $\geqslant 2$)

X: var cplxe, D: diviseur, $\mathscr{V} = \mathscr{O}_X(*D)$-mod. coh.
$\nabla : \mathscr{V} \to \Omega^1_X \otimes \mathscr{V}$: conn. mérom. ***intégrable*** ($\nabla^2 = 0$)

THÉORÈME LEVELT-TURRITTIN EN DIM. $\geqslant 2$ (TH. 3.3) (Mochizuki, Kedlaya): X projective lisse. $\exists\ \pi : X' \to X$ modif. projective t.q. $D' := \pi^{-1}(D) =$ DCN et $\pi^*(\mathscr{V}, \nabla)$ ***sans point tournant***: $\forall x' \in D'$, $\exists \widehat{P} \in \mathrm{GL}_d(\mathscr{O}_{\widehat{x}'}(*D'))$,

$$\boxed{\widehat{P}^{-1}\widehat{\nabla}\widehat{P} \underset{\text{mod. ramif.}}{=} \mathrm{d} + \mathrm{diag}_{\mathfrak{a} \in \mathrm{Irr}_{x'}(\nabla)}\Big(\mathrm{d}\mathfrak{a}\,\mathrm{Id} + \textstyle\sum_i C_{\mathfrak{a},i}\dfrac{dz_i}{z_i}\Big)}$$

avec $C_{\mathfrak{a},i}$ cste, $\mathfrak{a} \in \mathscr{A}_{x'} \subset \mathscr{O}_{\widehat{x}'}(*D')$, $\mathscr{A}_{x'}$ fini et ***bon***

Sing. irrégulières (dim. $\geqslant 2$)

X: var cplxe, D: diviseur, $\mathscr{V} = \mathscr{O}_X(*D)$-mod. coh.
$\nabla : \mathscr{V} \to \Omega^1_X \otimes \mathscr{V}$: conn. mérom. ***intégrable*** ($\nabla^2 = 0$)

THÉORÈME LEVELT-TURRITTIN EN DIM. $\geqslant 2$ (TH. 3.3) (Mochizuki, Kedlaya): X projective lisse. $\exists\ \pi : X' \to X$ modif. projective t.q. $D' := \pi^{-1}(D) =$ DCN et $\pi^*(\mathscr{V}, \nabla)$ ***sans point tournant***: $\forall x' \in D'$, $\exists \widehat{P} \in \mathrm{GL}_d(\mathscr{O}_{\widehat{x}'}(*D'))$,

$$\boxed{\widehat{P}^{-1}\widehat{\nabla}\widehat{P} \underset{\text{mod. ramif.}}{=} \mathrm{d} + \mathrm{diag}_{\mathfrak{a}\in \mathrm{Irr}_{x'}(\nabla)}\Big(\mathrm{d}\mathfrak{a}\,\mathrm{Id} + \textstyle\sum_i C_{\mathfrak{a},i}\dfrac{dz_i}{z_i}\Big)}$$

avec $C_{\mathfrak{a},i}$ cste, $\mathfrak{a} \in \mathcal{A}_{x'} \subset \mathscr{O}_{\widehat{x}'}(*D')$, $\mathcal{A}_{x'}$ fini et ***bon***

THÉORÈME (Mochizuki): De plus, $\forall$ cpte D'_i de D', soit $a_i \in \mathbb{R}$. Alors $\exists!$ $\mathscr{O}_{X'}$-réseau loc. libre ${}_{a}\mathscr{V} \subset \mathscr{V}$ t.q. $\forall x'$, $\exists$ base de ${}_{a}\mathscr{V}_{\widehat{x}'}$ adaptée à la decomp. et

$$\boxed{\mathrm{R\acute{e}}(\text{val. propre } C_{\mathfrak{a},i}) \in [a_i, a_i + 1[}$$

Conjecture de Kashiwara

Conjecture de Kashiwara

- $(V^{\mathrm{alg}}, \nabla)$ fibré alg. sur X^o quasi-proj. lisse $\dim = n$, à conn. ∇ ***intégrable*** ($\nabla^2 = 0$).

Conjecture de Kashiwara

- $(V^{\mathrm{alg}}, \nabla)$ fibré alg. sur X^o quasi-proj. lisse $\dim = n$, à conn. ∇ ***intégrable*** ($\nabla^2 = 0$).
  On supposera $(V^{\mathrm{alg}}, \nabla)$ ***simple*** (ou semi-simple).

Conjecture de Kashiwara

- $(V^{\mathrm{alg}}, \nabla)$ fibré alg. sur X^o quasi-proj. lisse $\dim = n$, à conn. ∇ ***intégrable*** ($\nabla^2 = 0$).
  On supposera $(V^{\mathrm{alg}}, \nabla)$ ***simple*** (ou semi-simple).
- X: compact. de X^o, proj. lisse/$\mathbb{C}$.

Conjecture de Kashiwara

- $(V^{\mathrm{alg}}, \nabla)$ fibré alg. sur X^o quasi-proj. lisse $\dim = n$, à conn. ∇ ***intégrable*** ($\nabla^2 = 0$).
  On supposera $(V^{\mathrm{alg}}, \nabla)$ ***simple*** (ou semi-simple).
- X: compact. de X^o, proj. lisse/$\mathbb{C}$.
  $\mathscr{D}_X^{(\mathrm{alg})}$: op. diff. (alg.) sur X.

Conjecture de Kashiwara

- $(V^{\mathrm{alg}}, \nabla)$ fibré alg. sur X^o quasi-proj. lisse $\dim = n$, à conn. ∇ ***intégrable*** ($\nabla^2 = 0$).
  On supposera $(V^{\mathrm{alg}}, \nabla)$ ***simple*** (ou semi-simple).
- X: compact. de X^o, proj. lisse/$\mathbb{C}$.
  $\mathscr{D}_X^{(\mathrm{alg})}$: op. diff. (alg.) sur X.
  $\mathscr{O}_X^{(\mathrm{alg})}$-mod. à conn. int. $\Leftrightarrow$ $\mathscr{D}_X^{(\mathrm{alg})}$-mod. à gauche

Conjecture de Kashiwara

- $(V^{\mathrm{alg}}, \nabla)$ fibré alg. sur X^o quasi-proj. lisse $\dim = n$, à conn. ∇ ***intégrable*** ($\nabla^2 = 0$).
  On supposera $(V^{\mathrm{alg}}, \nabla)$ ***simple*** (ou semi-simple).
- X: compact. de X^o, proj. lisse/$\mathbb{C}$.
  $\mathscr{D}_X^{(\mathrm{alg})}$: op. diff. (alg.) sur X.
  $\mathscr{O}_X^{(\mathrm{alg})}$-mod. à conn. int. $\Leftrightarrow$ $\mathscr{D}_X^{(\mathrm{alg})}$-mod. à gauche
- $(V^{\mathrm{alg}}, \nabla)$ simple $\Leftrightarrow$ $\mathscr{M}$: $\mathscr{D}_X^{\mathrm{alg}}$-mod. $\begin{cases} \textbf{\textit{holon. simple}} \\ \operatorname{Supp} \mathscr{M} = X \end{cases}$

Conjecture de Kashiwara

- $(V^{\mathrm{alg}}, \nabla)$ fibré alg. sur X^o quasi-proj. lisse $\dim = n$, à conn. ∇ ***intégrable*** ($\nabla^2 = 0$).
  On supposera $(V^{\mathrm{alg}}, \nabla)$ ***simple*** (ou semi-simple).
- X: compact. de X^o, proj. lisse/$\mathbb{C}$.
  $\mathscr{D}_X^{(\mathrm{alg})}$: op. diff. (alg.) sur X.
  $\mathscr{O}_X^{(\mathrm{alg})}$-mod. à conn. int. $\Leftrightarrow$ $\mathscr{D}_X^{(\mathrm{alg})}$-mod. à gauche
- $(V^{\mathrm{alg}}, \nabla)$ simple $\Leftrightarrow$ $\mathscr{M}$: $\mathscr{D}_X^{\mathrm{alg}}$-mod. $\begin{cases} \textbf{\textit{holon. simple}} \\ \mathrm{Supp}\,\mathscr{M} = X \end{cases}$
- $\mathrm{DR}^{\mathrm{alg}}\mathscr{M} = (\Omega_X^{n+\bullet} \otimes \mathscr{M}, \nabla)$, $\mathrm{DR}\,\mathscr{M} = (\Omega_{X^{\mathrm{an}}}^{n+\bullet} \otimes \mathscr{M}, \nabla)$.

Conjecture de Kashiwara

- $(V^{\mathrm{alg}}, \nabla)$ fibré alg. sur X^o quasi-proj. lisse $\dim = n$, à conn. ∇ ***intégrable*** ($\nabla^2 = 0$).
  On supposera $(V^{\mathrm{alg}}, \nabla)$ ***simple*** (ou semi-simple).
- X: compact. de X^o, proj. lisse/$\mathbb{C}$.
  $\mathscr{D}_X^{(\mathrm{alg})}$: op. diff. (alg.) sur X.
  $\mathscr{O}_X^{(\mathrm{alg})}$-mod. à conn. int. $\Leftrightarrow$ $\mathscr{D}_X^{(\mathrm{alg})}$-mod. à gauche
- $(V^{\mathrm{alg}}, \nabla)$ simple $\Leftrightarrow$ $\mathscr{M}$: $\mathscr{D}_X^{\mathrm{alg}}$-mod. $\begin{cases} \textbf{\textit{holon. simple}} \\ \operatorname{Supp} \mathscr{M} = X \end{cases}$
- $\mathrm{DR}^{\mathrm{alg}}\mathscr{M} = (\Omega_X^{n+\bullet} \otimes \mathscr{M}, \nabla)$, $\mathrm{DR}\,\mathscr{M} = (\Omega_{X^{\mathrm{an}}}^{n+\bullet} \otimes \mathscr{M}, \nabla)$.
  $$H^*(X, \mathrm{DR}^{\mathrm{alg}}\,\mathscr{M}) = H^*(X^{\mathrm{an}}, \mathrm{DR}\,\mathscr{M})$$

Conjecture de Kashiwara

- $(V^{\mathrm{alg}},\nabla)$ fibré alg. sur X^o quasi-proj. lisse $\dim = n$, à conn. ∇ ***intégrable*** ($\nabla^2 = 0$). On supposera $(V^{\mathrm{alg}},\nabla)$ ***simple*** (ou semi-simple).
- X: compact. de X^o, proj. lisse/$\mathbb{C}$. $\mathscr{D}_X^{(\mathrm{alg})}$: op. diff. (alg.) sur X. $\mathscr{O}_X^{(\mathrm{alg})}$-mod. à conn. int. $\Leftrightarrow$ $\mathscr{D}_X^{(\mathrm{alg})}$-mod. à gauche
- $(V^{\mathrm{alg}},\nabla)$ simple $\Leftrightarrow$ $\mathscr{M}$: $\mathscr{D}_X^{\mathrm{alg}}$-mod. $\begin{cases} \textbf{\textit{holon. simple}} \\ \operatorname{Supp}\mathscr{M} = X \end{cases}$
- $\mathrm{DR}^{\mathrm{alg}}\mathscr{M} = (\Omega_X^{n+\bullet}\otimes\mathscr{M},\nabla)$, $\mathrm{DR}\,\mathscr{M} = (\Omega_{X^{\mathrm{an}}}^{n+\bullet}\otimes\mathscr{M},\nabla)$.

$$H^*(X,\mathrm{DR}^{\mathrm{alg}}\mathscr{M}) = H^*(X^{\mathrm{an}},\mathrm{DR}\,\mathscr{M})$$

- Ex.: $f : X^o \to \mathbb{A}^1$ ***propre***,

Conjecture de Kashiwara

- $(V^{\mathrm{alg}}, \nabla)$ fibré alg. sur X^o quasi-proj. lisse $\dim = n$, à conn. ∇ ***intégrable*** ($\nabla^2 = 0$).
  On supposera $(V^{\mathrm{alg}}, \nabla)$ ***simple*** (ou semi-simple).
- X: compact. de X^o, proj. lisse/$\mathbb{C}$.
  $\mathscr{D}_X^{(\mathrm{alg})}$: op. diff. (alg.) sur X.
  $\mathscr{O}_X^{(\mathrm{alg})}$-mod. à conn. int. $\Leftrightarrow$ $\mathscr{D}_X^{(\mathrm{alg})}$-mod. à gauche
- $(V^{\mathrm{alg}}, \nabla)$ simple $\Leftrightarrow$ $\mathscr{M}$: $\mathscr{D}_X^{\mathrm{alg}}$-mod. $\begin{cases} \textit{holon. simple} \\ \mathrm{Supp}\,\mathscr{M} = X \end{cases}$
- $\mathrm{DR}^{\mathrm{alg}}\mathscr{M} = (\Omega_X^{n+\bullet} \otimes \mathscr{M}, \nabla)$, $\mathrm{DR}\,\mathscr{M} = (\Omega_{X^{\mathrm{an}}}^{n+\bullet} \otimes \mathscr{M}, \nabla)$.
  $$H^*(X, \mathrm{DR}^{\mathrm{alg}}\,\mathscr{M}) = H^*(X^{\mathrm{an}}, \mathrm{DR}\,\mathscr{M})$$
- Ex.: $f : X^o \to \mathbb{A}^1$ ***propre***, $(V^{\mathrm{alg}}, \nabla) = (\mathscr{O}_{X^o}, \mathrm{d} + \mathrm{d}f)$.

Conjecture de Kashiwara

- $(V^{\mathrm{alg}},\nabla)$ fibré alg. sur X^o quasi-proj. lisse $\dim = n$, à conn. ∇ ***intégrable*** ($\nabla^2 = 0$).
  On supposera $(V^{\mathrm{alg}},\nabla)$ ***simple*** (ou semi-simple).
- X: compact. de X^o, proj. lisse/$\mathbb{C}$.
  $\mathscr{D}_X^{(\mathrm{alg})}$: op. diff. (alg.) sur X.
  $\mathscr{O}_X^{(\mathrm{alg})}$-mod. à conn. int. $\Leftrightarrow$ $\mathscr{D}_X^{(\mathrm{alg})}$-mod. à gauche
- $(V^{\mathrm{alg}},\nabla)$ simple $\Leftrightarrow$ $\mathscr{M}$: $\mathscr{D}_X^{\mathrm{alg}}$-mod. $\begin{cases} \textbf{\textit{holon. simple}} \\ \operatorname{Supp}\mathscr{M} = X \end{cases}$
- $\mathrm{DR}^{\mathrm{alg}}\mathscr{M} = (\Omega_X^{n+\bullet}\otimes\mathscr{M},\nabla)$, $\mathrm{DR}\,\mathscr{M} = (\Omega_{X^{\mathrm{an}}}^{n+\bullet}\otimes\mathscr{M},\nabla)$.
  $$H^*(X,\mathrm{DR}^{\mathrm{alg}}\,\mathscr{M}) = H^*(X^{\mathrm{an}},\mathrm{DR}\,\mathscr{M})$$
- Ex.: $f : X^o \to \mathbb{A}^1$ ***propre***, $(V^{\mathrm{alg}},\nabla) = (\mathscr{O}_{X^o}, \mathrm{d}+\mathrm{d}f)$.
  $$H^*(X,\mathrm{DR}^{\mathrm{alg}}\,\mathscr{M}) = H^*\big(X^o,(\Omega_{X^o}^{n+\bullet},\mathrm{d}+\mathrm{d}f)\big)$$

Conjecture de Kashiwara

- $X = X^{\mathrm{an}}$: proj. lisse/$\mathbb{C}$

Conjecture de Kashiwara

- $X = X^{\mathbf{an}}$: proj. lisse/$\mathbb{C}$
- $\mathscr{M}$: $\mathscr{D}_X$-mod. holonome simple.

Conjecture de Kashiwara

- $X = X^{\mathrm{an}}$: proj. lisse/$\mathbb{C}$
- $\mathscr{M}$: $\mathscr{D}_X$-mod. holonome simple.
- $\mathrm{DR}\,\mathscr{M}$: complexe à cohom. $\mathbb{C}$-constr. (Kashiwara).

Conjecture de Kashiwara

- $X = X^{\mathrm{an}}$: proj. lisse/$\mathbb{C}$
- $\mathscr{M}$: $\mathscr{D}_X$-mod. holonome simple.
- $\mathrm{DR}\,\mathscr{M}$: complexe à cohom. $\mathbb{C}$-constr. (Kashiwara).
- $\mathrm{DR}\,\mathscr{M}$: faisceau pervers.

Conjecture de Kashiwara

- $X = X^{\mathrm{an}}$: proj. lisse/$\mathbb{C}$
- $\mathscr{M}$: $\mathscr{D}_X$-mod. holonome simple.
- $\mathrm{DR}\,\mathscr{M}$: complexe à cohom. $\mathbb{C}$-constr. (Kashiwara).
- $\mathrm{DR}\,\mathscr{M}$: faisceau pervers.
- QUESTION: Caractériser les faisc. perv. obtenus ?

Conjecture de Kashiwara

- $X = X^{\mathrm{an}}$: proj. lisse/$\mathbb{C}$
- $\mathscr{M}$: $\mathscr{D}_X$-mod. holonome simple.
- $\mathrm{DR}\,\mathscr{M}$: complexe à cohom. $\mathbb{C}$-constr. (Kashiwara).
- $\mathrm{DR}\,\mathscr{M}$: faisceau pervers.
- QUESTION: Caractériser les faisc. perv. obtenus ?
- RIEMANN-HILBERT (Kashiwara & Mebkhout)$\Rightarrow$
  Tout faisc. pervers ***simple*** est obtenu.

Conjecture de Kashiwara

- $X = X^{\mathrm{an}}$: proj. lisse/$\mathbb{C}$
- $\mathscr{M}$: $\mathscr{D}_X$-mod. holonome simple.
- $\mathrm{DR}\,\mathscr{M}$: complexe à cohom. $\mathbb{C}$-constr. (Kashiwara).
- $\mathrm{DR}\,\mathscr{M}$: faisceau pervers.
- QUESTION: Caractériser les faisc. perv. obtenus ?
- RIEMANN-HILBERT (Kashiwara & Mebkhout)$\Rightarrow$
  Tout faisc. pervers ***simple*** est obtenu.
- Faisc. pervers ***simple*** $\mathscr{F}$:

Conjecture de Kashiwara

- $X = X^{\mathrm{an}}$: proj. lisse/$\mathbb{C}$
- $\mathscr{M}$: $\mathscr{D}_X$-mod. holonome simple.
- $\mathrm{DR}\,\mathscr{M}$: complexe à cohom. $\mathbb{C}$-constr. (Kashiwara).
- $\mathrm{DR}\,\mathscr{M}$: faisceau pervers.
- QUESTION: Caractériser les faisc. perv. obtenus ?
- RIEMANN-HILBERT (Kashiwara & Mebkhout)$\Rightarrow$
  Tout faisc. pervers ***simple*** est obtenu.
- Faisc. pervers ***simple*** $\mathscr{F}$:
  $Z^o \subset X$ quasi-proj. lisse ***irred.***, $Z =$ adh.Z^o,

Conjecture de Kashiwara

- $X = X^{\mathrm{an}}$: proj. lisse/$\mathbb{C}$
- $\mathscr{M}$: $\mathscr{D}_X$-mod. holonome simple.
- $\mathrm{DR}\,\mathscr{M}$: complexe à cohom. $\mathbb{C}$-constr. (Kashiwara).
- $\mathrm{DR}\,\mathscr{M}$: faisceau pervers.
- QUESTION: Caractériser les faisc. perv. obtenus ?
- RIEMANN-HILBERT (Kashiwara & Mebkhout)$\Rightarrow$
  Tout faisc. pervers ***simple*** est obtenu.
- Faisc. pervers ***simple*** $\mathscr{F}$:
  $Z^o \subset X$ quasi-proj. lisse ***irred.***, $Z =$ adh.Z^o,
  $\mathscr{L}$ faisc. loc. cst. ***irred.*** sur Z^o,

Conjecture de Kashiwara

- $X = X^{\mathrm{an}}$: proj. lisse/$\mathbb{C}$
- $\mathscr{M}$: $\mathscr{D}_X$-mod. holonome simple.
- $\mathrm{DR}\,\mathscr{M}$: complexe à cohom. $\mathbb{C}$-constr. (Kashiwara).
- $\mathrm{DR}\,\mathscr{M}$: faisceau pervers.
- QUESTION: Caractériser les faisc. perv. obtenus ?
- RIEMANN-HILBERT (Kashiwara & Mebkhout)$\Rightarrow$
  Tout faisc. pervers ***simple*** est obtenu.
- Faisc. pervers ***simple*** $\mathscr{F}$:
  $Z^o \subset X$ quasi-proj. lisse ***irred.***, $Z =$ adh.Z^o,
  $\mathscr{L}$ faisc. loc. cst. ***irred.*** sur Z^o,
  $\mathscr{F} = \mathrm{IC}_Z(\mathscr{L})$ décalé de $\dim Z$.

Conjecture de Kashiwara

TH. LEFSCHETZ DIFFICILE (Conj. Kashiwara 1998):
$L = c_1(\text{ample}) \cup .$ $\quad \mathscr{M}$: $\mathscr{D}_X$-mod. holon. (semi)simple.

$$\boxed{\forall k \geqslant 1, \quad L^k : H^{-k}(X, \mathrm{DR}\,\mathscr{M}) \xrightarrow{\ \sim\ } H^k(X, \mathrm{DR}\,\mathscr{M})}$$

Conjecture de Kashiwara

TH. LEFSCHETZ DIFFICILE (Mochizuki 2011):
$L = c_1$(ample) $\cup$. $\mathscr{M}$: $\mathscr{D}_X$-mod. holon. (semi)simple.

$$\boxed{\forall k \geqslant 1, \quad L^k : H^{-k}(X, \mathrm{DR}\,\mathscr{M}) \xrightarrow{\sim} H^k(X, \mathrm{DR}\,\mathscr{M})}$$

Conjecture de Kashiwara

TH. LEFSCHETZ DIFFICILE (Mochizuki 2011):

$L = c_1$(ample) $\cup$. $\mathscr{M}$: $\mathscr{D}_X$-mod. holon. (semi)simple.

$$\boxed{\forall k \geqslant 1, \quad L^k : H^{-k}(X, \mathrm{DR}\,\mathscr{M}) \xrightarrow{\sim} H^k(X, \mathrm{DR}\,\mathscr{M})}$$

Ce qui est déjà connu:

Conjecture de Kashiwara

TH. LEFSCHETZ DIFFICILE (Mochizuki 2011):
$L = c_1(\text{ample}) \cup$. $\mathscr{M}$: $\mathscr{D}_X$-mod. holon. (semi)simple.

$$\boxed{\forall k \geqslant 1, \quad L^k : H^{-k}(X, \mathrm{DR}\,\mathscr{M}) \xrightarrow{\sim} H^k(X, \mathrm{DR}\,\mathscr{M})}$$

Ce qui est déjà connu:

- $\mathscr{M} = (\mathscr{O}_X, \mathrm{d})$: Hodge ($\sim$1940).

Conjecture de Kashiwara

TH. LEFSCHETZ DIFFICILE (Mochizuki 2011):
$L = c_1(\text{ample}) \cup$. $\mathscr{M}$: $\mathscr{D}_X$-mod. holon. (semi)simple.

$$\boxed{\forall k \geqslant 1, \quad L^k : H^{-k}(X, \mathrm{DR}\,\mathscr{M}) \xrightarrow{\sim} H^k(X, \mathrm{DR}\,\mathscr{M})}$$

Ce qui est déjà connu:

- $\mathscr{M} = (\mathscr{O}_X, \mathrm{d})$: Hodge ($\sim$1940).
- $\mathscr{M} = (V, \nabla)_X$ var. str. Hodge polarisable: Deligne ($\sim$1975).

Conjecture de Kashiwara

TH. LEFSCHETZ DIFFICILE (Mochizuki 2011):
$L = c_1(\text{ample}) \cup$. $\mathscr{M}$: $\mathscr{D}_X$-mod. holon. (semi)simple.

$$\boxed{\forall k \geqslant 1, \quad L^k : H^{-k}(X, \mathrm{DR}\,\mathscr{M}) \xrightarrow{\sim} H^k(X, \mathrm{DR}\,\mathscr{M})}$$

Ce qui est déjà connu:

- $\mathscr{M} = (\mathscr{O}_X, \mathrm{d})$: Hodge (∼1940).
- $\mathscr{M} = (V, \nabla)_X$ var. str. Hodge polarisable: Deligne (∼1975).
- $\mathscr{M} = (V, \nabla)_X$ simple: Corlette (1988) & Simpson (1992).

Conjecture de Kashiwara

TH. LEFSCHETZ DIFFICILE (Mochizuki 2011):
$L = c_1$(ample) $\cup$. $\mathscr{M}$: $\mathscr{D}_X$-mod. holon. (semi)simple.

$$\boxed{\forall k \geqslant 1, \quad L^k : H^{-k}(X, \mathrm{DR}\,\mathscr{M}) \xrightarrow{\sim} H^k(X, \mathrm{DR}\,\mathscr{M})}$$

Ce qui est déjà connu:

- $\mathscr{M} = (\mathscr{O}_X, \mathrm{d})$: Hodge ($\sim$1940).
- $\mathscr{M} = (V, \nabla)_X$ var. str. Hodge polarisable: Deligne ($\sim$1975).
- $\mathscr{M} = (V, \nabla)_X$ simple: Corlette (1988) & Simpson (1992).
  - Dém.: $\exists$ ***métrique harmonique*** sur $(V, \nabla)_X$.

Conjecture de Kashiwara

TH. LEFSCHETZ DIFFICILE (Mochizuki 2011):
$L = c_1(\text{ample}) \cup .\quad \mathscr{M}$: $\mathscr{D}_X$-mod. holon. (semi)simple.

$$\boxed{\forall k \geqslant 1, \quad L^k : H^{-k}(X, \mathrm{DR}\,\mathscr{M}) \xrightarrow{\sim} H^k(X, \mathrm{DR}\,\mathscr{M})}$$

Ce qui est déjà connu:

- $\mathscr{M} = (\mathscr{O}_X, \mathrm{d})$: Hodge ($\sim$1940).
- $\mathscr{M} = (V, \nabla)_X$ var. str. Hodge polarisable: Deligne ($\sim$1975).
- $\mathscr{M} = (V, \nabla)_X$ simple: Corlette (1988) & Simpson (1992).
  - Dém.: $\exists$ ***métrique harmonique*** sur $(V, \nabla)_X$.
  - Équivalent (Simpson): (V, ∇) sous-jacent à une ***var. structure de twisteur polarisée de poids*** 0.

Conjecture de Kashiwara

TH. LEFSCHETZ DIFFICILE (Mochizuki 2011):
$L = c_1(\text{ample}) \cup .$ $\mathscr{M}$: $\mathscr{D}_X$-mod. holon. (semi)simple.

$$\boxed{\forall k \geqslant 1, \quad L^k : H^{-k}(X, \mathrm{DR}\,\mathscr{M}) \xrightarrow{\sim} H^k(X, \mathrm{DR}\,\mathscr{M})}$$

Ce qui est déjà connu ($Z^o \subset Z \subset X \supset X^o$):

Conjecture de Kashiwara

TH. LEFSCHETZ DIFFICILE (Mochizuki 2011):
$L = c_1$(ample) $\cup$. $\mathscr{M}$: $\mathscr{D}_X$-mod. holon. (semi)simple.

$$\boxed{\forall k \geqslant 1, \quad L^k : H^{-k}(X, \mathrm{DR}\,\mathscr{M}) \xrightarrow{\sim} H^k(X, \mathrm{DR}\,\mathscr{M})}$$

Ce qui est déjà connu ($Z^o \subset Z \subset X \supset X^o$):

- $\mathscr{M} \leftrightarrow (\mathscr{O}_{Z^o}, \mathrm{d})$: Beilinson-Bernstein-Deligne-Gabber (1982).

Conjecture de Kashiwara

TH. LEFSCHETZ DIFFICILE (Mochizuki 2011):
$L = c_1(\text{ample}) \cup$. $\mathscr{M}$: $\mathscr{D}_X$-mod. holon. (semi)simple.

$$\boxed{\forall k \geqslant 1, \quad L^k : H^{-k}(X, \mathrm{DR}\,\mathscr{M}) \xrightarrow{\sim} H^k(X, \mathrm{DR}\,\mathscr{M})}$$

Ce qui est déjà connu ($Z^o \subset Z \subset X \supset X^o$):

- $\mathscr{M} \leftrightarrow (\mathscr{O}_{Z^o}, \mathrm{d})$: Beilinson-Bernstein-Deligne-Gabber (1982).
- $\mathscr{M} \leftrightarrow (V, \nabla)_{X^o}$ var. str. Hodge polarisable et $X \smallsetminus X^o =$ DCN: Cattani-Kaplan-Schmid & Kashiwara-Kawai (1982$\longrightarrow$1988).

Conjecture de Kashiwara

TH. LEFSCHETZ DIFFICILE (Mochizuki 2011):
$L = c_1(\text{ample}) \cup .$ $\mathscr{M}$: $\mathscr{D}_X$-mod. holon. (semi)simple.

$$\boxed{\forall k \geqslant 1, \quad L^k : H^{-k}(X, \mathrm{DR}\,\mathscr{M}) \xrightarrow{\sim} H^k(X, \mathrm{DR}\,\mathscr{M})}$$

Ce qui est déjà connu ($Z^o \subset Z \subset X \supset X^o$):

- $\mathscr{M} \leftrightarrow (\mathscr{O}_{Z^o}, \mathrm{d})$: Beilinson-Bernstein-Deligne-Gabber (1982).
- $\mathscr{M} \leftrightarrow (V, \nabla)_{X^o}$ var. str. Hodge polarisable et $X \smallsetminus X^o =$ DCN: Cattani-Kaplan-Schmid & Kashiwara-Kawai (1982$\longrightarrow$1988).
- $\mathscr{M} \leftrightarrow (V, \nabla)_{Z^o}$ var. str. Hodge polarisable: M. Saito (1988-1990).

Conjecture de Kashiwara

TH. LEFSCHETZ DIFFICILE (Mochizuki 2011):
$L = c_1(\text{ample}) \cup .\quad \mathscr{M}$: $\mathscr{D}_X$-mod. holon. (semi)simple.

$$\boxed{\forall k \geqslant 1, \quad L^k : H^{-k}(X, \mathrm{DR}\,\mathscr{M}) \xrightarrow{\sim} H^k(X, \mathrm{DR}\,\mathscr{M})}$$

Ce qui est déjà connu ($Z^o \subset Z \subset X \supset X^o$):

- $\mathscr{M} \leftrightarrow (\mathscr{O}_{Z^o}, \mathrm{d})$: Beilinson-Bernstein-Deligne-Gabber (1982).
- $\mathscr{M} \leftrightarrow (V, \nabla)_{X^o}$ var. str. Hodge polarisable et $X \smallsetminus X^o =$ DCN: Cattani-Kaplan-Schmid & Kashiwara-Kawai (1982⟶1988).
- $\mathscr{M} \leftrightarrow (V, \nabla)_{Z^o}$ var. str. Hodge polarisable: M. Saito (1988-1990).
- $\mathscr{M}$ ***simple à sing. reg.*** ($\mathrm{DR}\,\mathscr{M} = \mathrm{IC}_Z\,\mathscr{L}[\dim Z]$): Drinfeld (2001), Mochizuki (2007).

Métrique harmonique

Métrique harmonique

(V, ∇) holom. intégrable sur X^o lisse.

Métrique harmonique

(V, ∇) holom. intégrable sur X^o lisse.
h: métrique herm. sur V.

Métrique harmonique

(V, ∇) holom. intégrable sur X^o lisse.

h: métrique herm. sur V.

$\exists!$ conn. métrique $\partial_E + \overline{\partial}_E$ sur $H = \mathscr{C}^\infty \otimes V$ t.q.

$$\boxed{\nabla + \overline{\partial} = (\partial_E + \overline{\partial}_E) + (\theta + \theta^\dagger)}$$

avec $\theta^\dagger = h$-***adjoint*** de θ.

Métrique harmonique

(V, ∇) holom. intégrable sur X^o lisse.
h: métrique herm. sur V.
$\exists!$ conn. métrique $\partial_E + \overline{\partial}_E$ sur $H = \mathscr{C}^\infty \otimes V$ t.q.

$$\boxed{\nabla + \overline{\partial} = (\partial_E + \overline{\partial}_E) + (\theta + \theta^\dagger)}$$

avec $\theta^\dagger = h$-***adjoint*** de θ.

DÉFINITION: h est ***harmonique*** pour (V, ∇) si

$$\boxed{\overline{\partial}_E^2 = 0, \quad \overline{\partial}_E(\theta) = 0, \quad \theta \wedge \theta = 0}$$

Métrique harmonique

(V, ∇) holom. intégrable sur X^o lisse.
h: métrique herm. sur V.
$\exists!$ conn. métrique $\partial_E + \overline{\partial}_E$ sur $H = \mathscr{C}^\infty \otimes V$ t.q.

$$\boxed{\nabla + \overline{\partial} = (\partial_E + \overline{\partial}_E) + (\theta + \theta^\dagger)}$$

avec $\theta^\dagger = h$-***adjoint*** de θ.

DÉFINITION: h est ***harmonique*** pour (V, ∇) si

$$\boxed{\overline{\partial}_E^2 = 0, \quad \overline{\partial}_E(\theta) = 0, \quad \theta \wedge \theta = 0}$$

$\Rightarrow$ $E = \ker \overline{\partial}_E$ fibré holom., $\theta =$ ***chp de Higgs*** holom.

Métrique harmonique

(V, ∇) holom. intégrable sur X^o lisse.
h: métrique herm. sur V.
$\exists!$ conn. métrique $\partial_E + \overline{\partial}_E$ sur $H = \mathscr{C}^\infty \otimes V$ t.q.

$$\boxed{\nabla + \overline{\partial} = (\partial_E + \overline{\partial}_E) + (\theta + \theta^\dagger)}$$

avec $\theta^\dagger = h$-***adjoint*** de θ.

DÉFINITION: h est ***harmonique*** pour (V, ∇) si

$$\boxed{\overline{\partial}_E^2 = 0, \quad \overline{\partial}_E(\theta) = 0, \quad \theta \wedge \theta = 0}$$

$\Rightarrow E = \ker \overline{\partial}_E$ fibré holom., $\theta =$ ***chp de Higgs*** holom.

fibré plat harm. $\longleftrightarrow$ fibré de Higgs harm.

Métrique harmonique

(V, ∇) holom. intégrable sur X^o lisse.
h: métrique herm. sur V.
$\exists!$ conn. métrique $\partial_E + \overline{\partial}_E$ sur $H = \mathscr{C}^\infty \otimes V$ t.q.

$$\boxed{\nabla + \overline{\partial} = (\partial_E + \overline{\partial}_E) + (\theta + \theta^\dagger)}$$

avec $\theta^\dagger = h$-***adjoint*** de θ.

DÉFINITION: h est ***harmonique*** pour (V, ∇) si

$$\boxed{\overline{\partial}_E^2 = 0, \quad \overline{\partial}_E(\theta) = 0, \quad \theta \wedge \theta = 0}$$

$\Rightarrow E = \ker \overline{\partial}_E$ fibré holom., $\theta =$ ***chp de Higgs*** holom.

fibré plat harm. $\longleftrightarrow$ fibré de Higgs harm.

$\Rightarrow \forall \lambda \in \mathbb{C}$, $V^\lambda := \ker(\overline{\partial}_E + \lambda\theta^\dagger)$ fibré holom.,
$\nabla^\lambda := \lambda\partial_E + \theta$: ***$\lambda$-conn. holom.*** intégrable sur V^λ.

Métrique harmonique (exemple)

Métrique harmonique (exemple)

- $X^o = \Delta^*$, $\quad E = \mathscr{O}_{\Delta^*} \cdot \varepsilon$,

Métrique harmonique (exemple)

- $X^o = \Delta^*, \quad E = \mathscr{O}_{\Delta^*} \cdot \varepsilon,$
  $\theta\varepsilon = \varphi(z)\mathrm{d}z \otimes \varepsilon, \quad \varphi \in \mathscr{O}(\Delta^*).$

Métrique harmonique (exemple)

- $X^o = \Delta^*$, $\quad E = \mathscr{O}_{\Delta^*} \cdot \varepsilon$,
  $\theta\varepsilon = \varphi(z)\mathrm{d}z \otimes \varepsilon$, $\quad \varphi \in \mathscr{O}(\Delta^*)$.
- $\|\varepsilon\|_h = \exp(\eta(z))$, η réelle C^∞ sur Δ^*.

Métrique harmonique (exemple)

- $X^o = \Delta^*$, $\quad E = \mathscr{O}_{\Delta^*} \cdot \varepsilon$,
  $\theta\varepsilon = \varphi(z)\mathrm{d}z \otimes \varepsilon$, $\quad \varphi \in \mathscr{O}(\Delta^*)$.
- $\|\varepsilon\|_h = \exp(\eta(z))$, η réelle C^∞ sur Δ^*.
- (E, θ, h) harmonique $\iff$ η harmonique

Métrique harmonique (exemple)

- $X^o = \Delta^*$, $\quad E = \mathscr{O}_{\Delta^*} \cdot \varepsilon$,
  $\theta\varepsilon = \varphi(z)\mathrm{d}z \otimes \varepsilon$, $\quad \varphi \in \mathscr{O}(\Delta^*)$.
- $\|\varepsilon\|_h = \exp(\eta(z))$, η réelle C^∞ sur Δ^*.
- (E, θ, h) harmonique $\iff$ η harmonique
- $\eta(z) = \mathrm{Ré}\,\gamma(z) - a\log|z|$, γ holom., $a \in \mathbb{R}$.

Métrique harmonique (exemple)

- $X^o = \Delta^*$, $\quad E = \mathscr{O}_{\Delta^*} \cdot \varepsilon$,
  $\theta\varepsilon = \varphi(z)\mathrm{d}z \otimes \varepsilon$, $\quad \varphi \in \mathscr{O}(\Delta^*)$.
- $\|\varepsilon\|_h = \exp(\eta(z))$, η réelle C^∞ sur Δ^*.
- (E, θ, h) harmonique $\iff$ η harmonique
- $\eta(z) = \mathrm{Ré}\,\gamma(z) - a \log |z|$, γ holom., $a \in \mathbb{R}$.
- $e = \exp(-\gamma(z)) \cdot \varepsilon \Rightarrow \|e\|_h = |z|^{-a}$.

Métrique harmonique (exemple)

- $X^o = \Delta^*$, $\quad E = \mathscr{O}_{\Delta^*} \cdot \varepsilon$,
  $\theta\varepsilon = \varphi(z)\mathrm{d}z \otimes \varepsilon$, $\quad \varphi \in \mathscr{O}(\Delta^*)$.
- $\|\varepsilon\|_h = \exp(\eta(z))$, η réelle C^∞ sur Δ^*.
- (E, θ, h) harmonique $\iff$ η harmonique
- $\eta(z) = \mathrm{R\acute{e}}\,\gamma(z) - a\log|z|$, γ holom., $a \in \mathbb{R}$.
- $e = \exp(-\gamma(z)) \cdot \varepsilon \Rightarrow \|e\|_h = |z|^{-a}$.
- $\varphi(z) = \mathfrak{a}'(z) + \alpha/z$,
  $\alpha \in \mathbb{C}$, $\quad \mathfrak{a} \in \mathscr{O}(\Delta^*)$ sans terme cst.

Métrique harmonique (exemple)

- $X^o = \Delta^*, \quad E = \mathscr{O}_{\Delta^*} \cdot \varepsilon,$
  $\theta\varepsilon = \varphi(z)\mathrm{d}z \otimes \varepsilon, \quad \varphi \in \mathscr{O}(\Delta^*).$
- $\|\varepsilon\|_h = \exp(\eta(z))$, η réelle C^∞ sur Δ^*.
- (E, θ, h) harmonique $\iff$ η harmonique
- $\eta(z) = \mathrm{R\acute{e}}\,\gamma(z) - a\log|z|$, γ holom., $a \in \mathbb{R}$.
- $e = \exp(-\gamma(z)) \cdot \varepsilon \Rightarrow \|e\|_h = |z|^{-a}$.
- $\varphi(z) = \mathfrak{a}'(z) + \alpha/z,$
  $\alpha \in \mathbb{C}, \quad \mathfrak{a} \in \mathscr{O}(\Delta^*)$ sans terme cst.
- $\boxed{\mathfrak{p}(\lambda) = a + 2\,\mathrm{R\acute{e}}(\overline{\alpha}\lambda), \quad \mathfrak{e}(\lambda) = \alpha - a\lambda - \overline{\alpha}\lambda^2}$

Métrique harmonique (exemple)

- $X^o = \Delta^*, \quad E = \mathscr{O}_{\Delta^*} \cdot \varepsilon,$
  $\theta\varepsilon = \varphi(z)\mathrm{d}z \otimes \varepsilon, \quad \varphi \in \mathscr{O}(\Delta^*).$
- $\|\varepsilon\|_h = \exp(\eta(z))$, η réelle C^∞ sur Δ^*.
- (E, θ, h) harmonique $\iff$ η harmonique
- $\eta(z) = \mathrm{R\acute{e}}\,\gamma(z) - a \log|z|$, γ holom., $a \in \mathbb{R}$.
- $e = \exp(-\gamma(z)) \cdot \varepsilon \Rightarrow \|e\|_h = |z|^{-a}$.
- $\varphi(z) = \mathfrak{a}'(z) + \alpha/z,$
  $\alpha \in \mathbb{C}, \quad \mathfrak{a} \in \mathscr{O}(\Delta^*)$ sans terme cst.
- $\boxed{\mathfrak{p}(\lambda) = a + 2\,\mathrm{R\acute{e}}(\overline{\alpha}\lambda), \quad \mathfrak{e}(\lambda) = \alpha - a\lambda - \overline{\alpha}\lambda^2}$

$$v^\lambda = (e^{\overline{\lambda}\mathfrak{a}(z) - \lambda\overline{\mathfrak{a}(z)}}|z|^{-2\overline{\alpha}\lambda}) \cdot e, \quad \|v^\lambda\|_h = |z|^{-\mathfrak{p}(\lambda)}$$

Métrique harmonique (exemple)

- $X^o = \Delta^*, \quad E = \mathscr{O}_{\Delta^*} \cdot \varepsilon,$
  $\theta\varepsilon = \varphi(z)\mathrm{d}z \otimes \varepsilon, \quad \varphi \in \mathscr{O}(\Delta^*).$
- $\|\varepsilon\|_h = \exp(\eta(z))$, η réelle C^∞ sur Δ^*.
- (E, θ, h) harmonique $\iff$ η harmonique
- $\eta(z) = \mathrm{R\acute{e}}\,\gamma(z) - a \log|z|$, γ holom., $a \in \mathbb{R}$.
- $e = \exp(-\gamma(z)) \cdot \varepsilon \Rightarrow \|e\|_h = |z|^{-a}$.
- $\varphi(z) = \mathfrak{a}'(z) + \alpha/z,$
  $\alpha \in \mathbb{C}, \quad \mathfrak{a} \in \mathscr{O}(\Delta^*)$ sans terme cst.
- $\boxed{\mathfrak{p}(\lambda) = a + 2\,\mathrm{R\acute{e}}(\overline{\alpha}\lambda), \quad \mathfrak{e}(\lambda) = \alpha - a\lambda - \overline{\alpha}\lambda^2}$

$$v^\lambda = \left(e^{\overline{\lambda}\mathfrak{a}(z) - \lambda\overline{\mathfrak{a}(z)}}|z|^{-2\overline{\alpha}\lambda}\right) \cdot e, \quad \|v^\lambda\|_h = |z|^{-\mathfrak{p}(\lambda)}$$

$$\boxed{\nabla^\lambda v^\lambda = \left((1 + |\lambda|)^2 z\mathfrak{a}'(z) + \mathfrak{e}(\lambda)\right)\frac{\mathrm{d}z}{z} \otimes v^\lambda}$$

Hitchin-Kobayashi sauvage

Hitchin-Kobayashi sauvage

- $X^o \subset X \supset D$, X proj. lisse, $D =$ DCN

Hitchin-Kobayashi sauvage

- $X^o \subset X \supset D$, X proj. lisse, $D =$ DCN
- $(V^{\mathrm{alg}}, \nabla)$ fibré alg. à conn. intégrable ***simple***

Hitchin-Kobayashi sauvage

- $X^o \subset X \supset D$, X proj. lisse, $D =$ DCN
- $(V^{\mathrm{alg}}, \nabla)$ fibré alg. à conn. intégrable ***simple***
- $\iff$ $\mathscr{O}_X(*D)$-mod. coh. $(\mathscr{V}, \nabla)$ à conn. int. ***simple***

Hitchin-Kobayashi sauvage

- $X^o \subset X \supset D$, X proj. lisse, $D =$ DCN
- $(V^{\mathrm{alg}}, \nabla)$ fibré alg. à conn. intégrable ***simple***
- $\iff$ $\mathscr{O}_X(*D)$-mod. coh. $(\mathscr{V}, \nabla)$ à conn. int. ***simple***
- HYPOTHÈSE: Bon Levelt-Turrittin pour ∇ sur D.

Hitchin-Kobayashi sauvage

- $X^o \subset X \supset D$, X proj. lisse, $D =$ DCN
- $(V^{\mathrm{alg}}, \nabla)$ fibré alg. à conn. intégrable ***simple***
- $\iff$ $\mathscr{O}_X(*D)$-mod. coh. $(\mathscr{V}, \nabla)$ à conn. int. ***simple***
- HYPOTHÈSE: Bon Levelt-Turrittin pour ∇ sur D.
- $\Rightarrow$ $\exists$ filtr. de Deligne-Malgrange ${}_a\mathscr{V}$.

Hitchin-Kobayashi sauvage

- $X^o \subset X \supset D$, X proj. lisse, $D =$ DCN
- $(V^{\mathrm{alg}}, \nabla)$ fibré alg. à conn. intégrable ***simple***
- $\iff$ $\mathscr{O}_X(*D)$-mod. coh. $(\mathscr{V}, \nabla)$ à conn. int. ***simple***
- HYPOTHÈSE: Bon Levelt-Turrittin pour ∇ sur D.
- $\Rightarrow$ $\exists$ filtr. de Deligne-Malgrange ${}_a\mathscr{V}$.
- THÉORÈME (Mochizuki 2011): $\exists$ métr. h ***harm.*** pour $(\mathscr{V}, \nabla)_{|X^o}$, ***adaptée à*** la filtr. de Deligne-Malgrange ${}_a\mathscr{V}$

Hitchin-Kobayashi sauvage

- $X^o \subset X \supset D$, X proj. lisse, $D =$ DCN
- $(V^{\mathrm{alg}}, \nabla)$ fibré alg. à conn. intégrable ***simple***
- $\iff$ $\mathscr{O}_X(*D)$-mod. coh. $(\mathscr{V}, \nabla)$ à conn. int. ***simple***
- HYPOTHÈSE: Bon Levelt-Turrittin pour ∇ sur D.
- $\Rightarrow$ $\exists$ filtr. de Deligne-Malgrange ${}_a\mathscr{V}$.
- THÉORÈME (Mochizuki 2011): $\exists$ métr. h ***harm.*** pour $(\mathscr{V}, \nabla)_{|X^o}$, ***adaptée à*** la filtr. de Deligne-Malgrange ${}_a\mathscr{V}$
- $X = \Delta^n$, $D = \{z_1 \cdots z_\ell = 0\}$, $\forall U \subset X$, ${}_a\mathscr{V}(U)$:

$$\Big\{v \in \mathscr{V}(U \smallsetminus D) \mid \forall \varepsilon > 0,\ \|v\|_h = O\big(\textstyle\prod_{i=1}^{\ell} |z_i|^{-a_i-\varepsilon}\big) \text{ loc. sur } U\Big\}$$

Hitchin-Kobayashi sauvage

- $X^o \subset X \supset D$, X proj. lisse, $D =$ DCN
- $(V^{\mathrm{alg}}, \nabla)$ fibré alg. à conn. intégrable ***simple***
- $\iff$ $\mathscr{O}_X(*D)$-mod. coh. $(\mathscr{V}, \nabla)$ à conn. int. ***simple***
- HYPOTHÈSE: Bon Levelt-Turrittin pour ∇ sur D.
- $\Rightarrow \exists$ filtr. de Deligne-Malgrange ${}_{a}\mathscr{V}$.
- THÉORÈME (Mochizuki 2011): $\exists$ métr. h ***harm.*** pour $(\mathscr{V}, \nabla)_{|X^o}$, ***adaptée à*** la filtr. de Deligne-Malgrange ${}_{a}\mathscr{V}$
- $X = \Delta^n$, $D = \{z_1 \cdots z_\ell = 0\}$, $\forall U \subset X$, ${}_{a}\mathscr{V}(U)$:

$$\Big\{ v \in \mathscr{V}(U \smallsetminus D) \mid \forall \varepsilon > 0,\ \|v\|_h = O\Big(\prod_{i=1}^{\ell} |z_i|^{-a_i - \varepsilon}\Big) \text{ loc. sur } U \Big\}$$

- De plus, (E, θ) est un fibré de Higgs holom. sur X^o ***sauvage*** le long de D: $\forall x \in D$,

$$\theta_x = \mathrm{diag}_{\mathfrak{a} \in \mathrm{Irr}_x(\theta)}(\mathrm{d}\mathfrak{a}\, \mathrm{Id} + \Theta_{\mathfrak{a}}), \quad \mathrm{Char}\, \Theta_{\mathfrak{a}} \text{ ***mérom.***}$$

Prolongement

Prolongement

THÉORÈME (Mochizuki 2011): Pour tout $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{C}$ et tout $\boldsymbol{a} = (\boldsymbol{a}_i)$, le $\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}}$-mod. ${}_{\boldsymbol{a}}\mathscr{V}^{\boldsymbol{\lambda}}$ est loc libre et $(\mathscr{V}^{\boldsymbol{\lambda}}, {}_{\bullet}\mathscr{V}^{\boldsymbol{\lambda}}, \nabla^{\boldsymbol{\lambda}})$ est un fibré mérom. parabolique plat/de Higgs.

Prolongement

THÉORÈME (Mochizuki 2011): Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ et tout $\boldsymbol{a} = (\boldsymbol{a}_i)$, le $\mathscr{O}_X$-mod. ${}_{\boldsymbol{a}}\mathscr{V}^{\lambda}$ est loc libre et $(\mathscr{V}^{\lambda}, {}_{\bullet}\mathscr{V}^{\lambda}, \nabla^{\lambda})$ est un fibré mérom. parabolique plat/de Higgs.

$\Leftarrow$ propriétés loc. des métriques harmoniques sauvages: elles sont ***acceptables*** (au sens de Cornalba-Griffiths 1975), *i.e.*, la norme de la courbure (par rapport à la métrique et la métrique de type Poincaré sur la base) est bornée.

Prolongement

THÉORÈME (Mochizuki 2011): Pour tout $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{C}$ et tout $\boldsymbol{a} = (\boldsymbol{a}_i)$, le $\mathscr{O}_X$-mod. ${}_{\boldsymbol{a}}\mathscr{V}^{\boldsymbol{\lambda}}$ est loc libre et $(\mathscr{V}^{\boldsymbol{\lambda}}, {}_{\bullet}\mathscr{V}^{\boldsymbol{\lambda}}, \boldsymbol{\nabla}^{\boldsymbol{\lambda}})$ est un fibré mérom. parabolique plat/de Higgs.

$\Leftarrow$ propriétés loc. des métriques harmoniques sauvages: elles sont ***acceptables*** (au sens de Cornalba-Griffiths 1975), *i.e.*, la norme de la courbure (par rapport à la métrique et la métrique de type Poincaré sur la base) est bornée.

PROBLÈME DÉLICAT: La dépendance en $\boldsymbol{\lambda}$ n'est pas holomorphe.

Prolongement

THÉORÈME (Mochizuki 2011): Pour tout $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{C}$ et tout $\boldsymbol{a} = (\boldsymbol{a}_i)$, le $\mathscr{O}_X$-mod. ${}_{\boldsymbol{a}}\mathscr{V}^{\boldsymbol{\lambda}}$ est loc libre et $(\mathscr{V}^{\boldsymbol{\lambda}}, {}_{\bullet}\mathscr{V}^{\boldsymbol{\lambda}}, \nabla^{\boldsymbol{\lambda}})$ est un fibré mérom. parabolique plat/de Higgs.

$\Leftarrow$ propriétés loc. des métriques harmoniques sauvages: elles sont ***acceptables*** (au sens de Cornalba-Griffiths 1975), *i.e.*, la norme de la courbure (par rapport à la métrique et la métrique de type Poincaré sur la base) est bornée.

PROBLÈME DÉLICAT: La dépendance en $\boldsymbol{\lambda}$ n'est pas holomorphe. Exemple en rang $\mathbf{1}$ et dimension $\mathbf{1}$:

$$\nabla^{\boldsymbol{\lambda}} v^{\boldsymbol{\lambda}} = \big((1 + |\boldsymbol{\lambda}|)^2 z\mathfrak{a}'(z) + \mathfrak{c}(\boldsymbol{\lambda})\big)\frac{\mathrm{d}z}{z} \otimes v^{\boldsymbol{\lambda}}$$

Conclusion

Conclusion

TH. LEFSCHETZ DIFFICILE (Mochizuki 2011):
$L = c_1$(ample) $\cup$. $\mathscr{M}$: $\mathscr{D}_X$-mod. holon. (semi)simple.

$$\boxed{\forall k \geqslant 1, \quad L^k : H^{-k}(X, \mathrm{DR}\,\mathscr{M}) \xrightarrow{\sim} H^k(X, \mathrm{DR}\,\mathscr{M})}$$

Conclusion

TH. LEFSCHETZ DIFFICILE (Mochizuki 2011):
$L = c_1(\text{ample}) \cup .$ $\mathscr{M}$: $\mathscr{D}_X$-mod. holon. (semi)simple.

$$\boxed{\forall k \geqslant 1, \quad L^k : H^{-k}(X, \mathrm{DR}\,\mathscr{M}) \xrightarrow{\sim} H^k(X, \mathrm{DR}\,\mathscr{M})}$$

- $Z =$ support $\mathscr{M}$, $Z \subset X$ irred.
  $\mathscr{M}_{|Z^o} \Longleftrightarrow (V^{\mathrm{alg}}, \nabla)_{Z^o}$ (semi)simple.

Conclusion

TH. LEFSCHETZ DIFFICILE (Mochizuki 2011):
$L = c_1(\text{ample}) \cup .$ $\mathscr{M}$: $\mathscr{D}_X$-mod. holon. (semi)simple.

$$\boxed{\forall k \geqslant 1, \quad L^k : H^{-k}(X, \mathrm{DR}\,\mathscr{M}) \xrightarrow{\sim} H^k(X, \mathrm{DR}\,\mathscr{M})}$$

- $Z =$ support $\mathscr{M}$, $Z \subset X$ irred.
  $\mathscr{M}_{|Z^o} \Longleftrightarrow (V^{\mathrm{alg}}, \nabla)_{Z^o}$ (semi)simple.
- $\exists$ compact. proj. lisse $Z' \supset Z^o$ t.q.
  $D = Z' \smallsetminus Z^o =$ DCN et $(V^{\mathrm{alg}}, \nabla)$ bon L.-T. sur D.

Conclusion

TH. LEFSCHETZ DIFFICILE (Mochizuki 2011):
$L = c_1(\text{ample}) \cup .\quad \mathscr{M}$: $\mathscr{D}_X$-mod. holon. (semi)simple.

$$\boxed{\forall k \geqslant 1, \quad L^k : H^{-k}(X, \mathrm{DR}\,\mathscr{M}) \xrightarrow{\sim} H^k(X, \mathrm{DR}\,\mathscr{M})}$$

- $Z =$ support $\mathscr{M}$, $Z \subset X$ irred.
  $\mathscr{M}_{|Z^o} \Longleftrightarrow (V^{\mathrm{alg}}, \nabla)_{Z^o}$ (semi)simple.
- $\exists$ compact. proj. lisse $Z' \supset Z^o$ t.q.
  $D = Z' \smallsetminus Z^o =$ DCN et $(V^{\mathrm{alg}}, \nabla)$ bon L.-T. sur D.
- $\Rightarrow$ $\exists$ filtr. Deligne-Malgrange le long de D.

Conclusion

TH. LEFSCHETZ DIFFICILE (Mochizuki 2011):
$L = c_1(\text{ample}) \cup .$ $\quad \mathscr{M}$: $\mathscr{D}_X$-mod. holon. (semi)simple.

$$\boxed{\forall k \geqslant 1, \quad L^k : H^{-k}(X, \mathrm{DR}\,\mathscr{M}) \xrightarrow{\sim} H^k(X, \mathrm{DR}\,\mathscr{M})}$$

- $Z =$ support $\mathscr{M}$, $Z \subset X$ irred.
  $\mathscr{M}_{|Z^o} \Longleftrightarrow (V^{\mathrm{alg}}, \nabla)_{Z^o}$ (semi)simple.
- $\exists$ compact. proj. lisse $Z' \supset Z^o$ t.q.
  $D = Z' \smallsetminus Z^o =$ DCN et $(V^{\mathrm{alg}}, \nabla)$ bon L.-T. sur D.
- $\Rightarrow \exists$ filtr. Deligne-Malgrange le long de D.
- $\Rightarrow \exists$ métrique h harm. et adaptée à la filtr. DM.

Conclusion

TH. LEFSCHETZ DIFFICILE (Mochizuki 2011):
$L = c_1(\text{ample}) \cup .$ $\mathscr{M}$: $\mathscr{D}_X$-mod. holon. (semi)simple.

$$\boxed{\forall k \geqslant 1, \quad L^k : H^{-k}(X, \mathrm{DR}\,\mathscr{M}) \xrightarrow{\sim} H^k(X, \mathrm{DR}\,\mathscr{M})}$$

- $Z =$ support $\mathscr{M}$, $Z \subset X$ irred.
  $\mathscr{M}_{|Z^o} \Longleftrightarrow (V^{\mathrm{alg}}, \nabla)_{Z^o}$ (semi)simple.
- $\exists$ compact. proj. lisse $Z' \supset Z^o$ t.q.
  $D = Z' \smallsetminus Z^o =$ DCN et $(V^{\mathrm{alg}}, \nabla)$ bon L.-T. sur D.
- $\Rightarrow \exists$ filtr. Deligne-Malgrange le long de D.
- $\Rightarrow \exists$ métrique h harm. et adaptée à la filtr. DM.

SUGGESTION: considérer la cohom. L^2 de (V, ∇) par rapport à h et à une métrique de type Poincaré sur Z'?

Conclusion

SUGGESTION: considérer la cohom. L^2 de (V, ∇) par rapport à h et à une métrique de type Poincaré sur Z'?

Conclusion

SUGGESTION: considérer la cohom. L^2 de (V, ∇) par rapport à h et à une métrique de type Poincaré sur Z'?

- OK si $\dim Z = 1$. Mais Th. Lefschetz difficile trivial en dim. 1.

Conclusion

SUGGESTION: considérer la cohom. L^2 de (V, ∇) par rapport à h et à une métrique de type Poincaré sur Z'?

- OK si $\dim Z = 1$. Mais Th. Lefschetz difficile trivial en dim. 1.
- Par contre, analogue du th. de Zucker OK

Conclusion

SUGGESTION: considérer la cohom. L^2 de (V, ∇) par rapport à h et à une métrique de type Poincaré sur Z'?

- OK si $\dim Z = 1$. Mais Th. Lefschetz difficile trivial en dim. 1.
- Par contre, analogue du th. de Zucker OK:

THÉORÈME DE HODGE (Zucker 1979): X compacte $\Rightarrow$ struct. de Hodge pure polarisée sur $H^*(X, j_*(V^\nabla))$.

Conclusion

SUGGESTION: considérer la cohom. L^2 de (V, ∇) par rapport à h et à une métrique de type Poincaré sur Z'?

- OK si $\dim Z = 1$. Mais Th. Lefschetz difficile trivial en dim. 1.
- Par contre, analogue du th. de Zucker OK.

Conclusion

SUGGESTION: considérer la cohom. L^2 de (V, ∇) par rapport à h et à une métrique de type Poincaré sur Z'?

- OK si $\dim Z = 1$. Mais Th. Lefschetz difficile trivial en dim. 1.
- Par contre, analogue du th. de Zucker OK.
- Si $\dim Z \geqslant 1$, stratégie de M. Saito: $\exists$ catégorie des $\mathscr{D}$-modules avec structure de twisteur polarisable (familles de $\mathscr{D}$-modules paramétrés par λ).

Conclusion

SUGGESTION: considérer la cohom. L^2 de (V, ∇) par rapport à h et à une métrique de type Poincaré sur Z'?

- OK si $\dim Z = 1$. Mais Th. Lefschetz difficile trivial en dim. 1.
- Par contre, analogue du th. de Zucker OK.
- Si $\dim Z \geqslant 1$, stratégie de M. Saito: $\exists$ catégorie des $\mathscr{D}$-modules avec structure de twisteur polarisable (familles de $\mathscr{D}$-modules paramétrés par λ).
- Th. Lefschetz difficile OK dans cette catégorie.

Conclusion

SUGGESTION: considérer la cohom. L^2 de (V, ∇) par rapport à h et à une métrique de type Poincaré sur Z'?

- OK si $\dim Z = 1$. Mais Th. Lefschetz difficile trivial en dim. 1.
- Par contre, analogue du th. de Zucker OK.
- Si $\dim Z \geqslant 1$, stratégie de M. Saito: $\exists$ catégorie des $\mathscr{D}$-modules avec structure de twisteur polarisable (familles de $\mathscr{D}$-modules paramétrés par λ).
- Th. Lefschetz difficile OK dans cette catégorie.
- Point délicat: $\mathscr{M}$ simple $\Rightarrow \mathscr{M} = \widetilde{\mathscr{M}}_{|\lambda=1}$ avec $\widetilde{\mathscr{M}}$ twisteur polarisable.

Conclusion

SUGGESTION: considérer la cohom. L^2 de (V, ∇) par rapport à h et à une métrique de type Poincaré sur Z'?

- OK si $\dim Z = 1$. Mais Th. Lefschetz difficile trivial en dim. 1.
- Par contre, analogue du th. de Zucker OK.
- Si $\dim Z \geqslant 1$, stratégie de M. Saito: $\exists$ catégorie des $\mathscr{D}$-modules avec structure de twisteur polarisable (familles de $\mathscr{D}$-modules paramétrés par λ).
- Th. Lefschetz difficile OK dans cette catégorie.
- Point délicat: $\mathscr{M}$ simple $\Rightarrow \mathscr{M} = \widetilde{\mathscr{M}}_{|\lambda=1}$ avec $\widetilde{\mathscr{M}}$ twisteur polarisable.
- $\Rightarrow$ Th. Lefschetz difficile OK pour $\mathscr{M}$. $\square$