LE TYPE TOPOLOGIQUE ECLATE D'UNE APPLICATION ANALYTIQUE

C. SABBAH

Centre de Mathématiques de l'Ecole Polytechnique
Plateau de Palaiseau 91128 Palaiseau Cedex

"Laboratoire de Recherche Associé au C.N.R.S. n°169"

M540.1081 Octobre 1981

INTRODUCTION

Soient $f : X \longrightarrow Y$ et $g : X' \longrightarrow Y'$ deux applications analytiques entre espaces analytiques complexes réduits. On dit que f et g ont même type topologique si il existe des homéomorphismes φ et Ψ qui rendent le diagramme suivant commutatif :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\Psi} & X' \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ Y & \xrightarrow[\varphi]{} & Y' \end{array}$$

Fukuda a démontré ([F]) la conjecture suivante de R. Thom : Le nombre de types topologiques de polynômes $p : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ de degré inférieur ou égal à d (n et d fixés) est fini. On sait cependant ([Th], [N]) que, pour les applications polynomiales $p : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^m$ de degré inférieur ou égal à d, et pour n, m et d supérieurs ou égaux à 3, le type topologique présente des "modules". Ceci a été expliqué par R. Thom comme résultant de situations d'"éclatement" pour les applications p.

Si une telle application p présente de l'éclatement, on peut trouver une suite d'éclatements de $\mathbb{C}^m$ de sorte que l'application $\tilde{p}$ obtenue par changement de base n'en présente plus ([S]). Ceci nous conduit à considérer une relation plus grossière que l'équivalence topologique : l'équivalence topologique éclatée. Le résultat principal de ce travail est de montrer la finitude du nombre de types topologiques éclatés d'application polynomiales $p : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^m$ de degré inférieur ou égal à d.

Quand n = 2, on peut alors montrer que le nombre de types topologiques est lui aussi fini, ce qui répond à une question posée par Nakai. Pour n = m = 2, le résultat était déjà démontré (cf[A]).

Nous démontrerons ces résultats pour des applications entre espaces analytiques complexes compacts, le cas des polynômes en étant un corollaire.

Remarquons enfin qu'on pourrait de même définir le type topologique éclaté pour des germes d'applications analytiques. Il faudrait alors utiliser la notion d'éclatement local ([H_3]). D'une manière générale, nous renvoyons à [S] pour certaines notations, et pour la démonstration de certains résultats. Les espaces analytiques considérés seront toujours munis de leur structure réduite, et les stratifications seront analytiques complexes, les strates étant connexes.

§ 1 LE TYPE TOPOLOGIQUE ECLATE

On considère deux applications analytiques $f_i : X_i \longrightarrow Y_i$ $(i=1,2)$, où X_i et Y_i sont des espaces analytiques complexes réduits et compacts, et la relation suivante entre elles : Pour chaque i, il existe une suite finie d'éclatements au-dessus de Y_i, dont le composé est noté $\pi_i : \tilde{Y}_i \longrightarrow Y_i$, telle que :

a) soit $\Sigma_i \subset Y_i$ la réunion des images des centres d'éclatement dans Y_i. Alors Σ_i est nulle part dense dans $f_i(X_i)$ $(i=1,2)$.

b) on considère les produits fibrés

$$\begin{tikzcd} \tilde{X}_i \arrow[r] \arrow[d, "\tilde{f}_i"'] & X_i \arrow[d, "f_i"] \\ \tilde{Y}_i \arrow[r, "\pi_i"'] & Y_i \end{tikzcd}$$

Alors les applications $\tilde{f}_1$ et $\tilde{f}_2$ sont topologiquement équivalentes, c'est-à-dire qu'il existe des homéomorphismes $\tilde{\varphi}$ et $\tilde{\Psi}$ faisant commuter le diagramme

$$\begin{tikzcd} \tilde{X}_1 \arrow[r, "\tilde{\Psi}"] \arrow[d, "\tilde{f}_1"'] & \tilde{X}_2 \arrow[d, "\tilde{f}_2"] \\ \tilde{Y}_1 \arrow[r, "\tilde{\varphi}"'] & \tilde{Y}_2 \end{tikzcd}$$

c) soit $\widehat{f_i(X_i)}$ le transformé strict de $f_i(X_i)$ par π_i, et $\hat{X}_i$ celui de X_i.

Alors $\tilde{\varphi}$ induit un homéomorphisme $\hat{\varphi} : \widehat{f_1(X_1)} \longrightarrow \widehat{f_2(X_2)}$, et $\tilde{\Psi}$ un homéomorphisme $\hat{\Psi} : \hat{X}_1 \longrightarrow \hat{X}_2$, de sorte qu'on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \hat{X}_1 & \xrightarrow{\hat{\Psi}} & \hat{X}_2 \\ {\scriptstyle \hat{f}_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \hat{f}_2} \\ \widehat{f_1(X_1)} & \xrightarrow[\hat{\varphi}]{} & \widehat{f_2(X_2)} \end{array}$$

<u>Définition</u> : Soient $f : X \longrightarrow Y$ et $g : X' \longrightarrow Y'$ deux applications entre espaces analytiques compacts. On dira que f et g ont même type topologique éclaté si il existe une suite finie $f_o = f, f_1, \ldots, f_n = g$ d'applications $f_i : X_i \longrightarrow Y_i$, telle que pour chaque i, f_i et f_{i+1} vérifient la relation précédente.

<u>Remarque</u> : Si f et g ont même type topologique, elles ont même type topologique éclaté, la réciproque étant fausse. Par contre, si Y et Y' sont des courbes lisses, les deux notions coïncident.

<u>Théorème 1</u> : Soit $F : X \longrightarrow Y$ un morphisme propre entre espaces analytiques réduits de dimension finie, et $p: Y \longrightarrow S$ un autre morphisme propre, S étant l'espace des paramètres. Le nombre de types topologiques éclatés apparaîssant dans la famille F d'applications $F_s : X_s \longrightarrow Y_s$, $s \in S$, est localement fini sur S.

<u>Démonstration</u> : On peut supposer que $S = p \circ F(X)$, puisque $p \circ F$ est propre.

Considérons une modification propre $\pi : \tilde{Y} \longrightarrow Y$, composée d'une suite propre d'éclatements (cf[H_1]) qui vérifie les propriétés de [S] prop.(3.1).

Soit $\tilde{F} : \tilde{X} = X \times_Y \tilde{Y} \longrightarrow \tilde{Y}$ l'image inverse de F par π et soit $\tilde{\mathcal{S}} = (\mathcal{S}_{\tilde{X}}, \mathcal{S}_{\tilde{Y}})$ une c-stratification de $\tilde{F}$ donnée par [S] prop.(3.1) (cf[S] § 2, pour la définition d'une c-stratification.)

On considère maintenant la famille $\tilde{X} \xrightarrow{\tilde{F}} \tilde{Y} \xrightarrow{\tilde{p}} S$, où $\tilde{p} = p \circ \pi$.

<u>Assertion</u> : Il existe un raffinement $\mathcal{C}_{\tilde{Y}}$ de la stratification $\mathcal{S}_{\tilde{Y}}$

et un ouvert de Zariski lisse et dense Ω de S, tels que

-1) $\mathcal{C}_{\tilde{Y}}$ est une stratification de Whitney, et si $\tilde{Y}_\beta$ est une strate de $\mathcal{C}_{\tilde{Y}}$ telle que $\tilde{p}(\tilde{Y}_\beta) \cap \Omega \neq \emptyset$, alors $\tilde{p}(\tilde{Y}_\beta)$ est une composante connexe de Ω et $\tilde{p} : \tilde{Y}_\beta \longrightarrow \tilde{p}(\tilde{Y}_\beta)$ est une submersion.

2) La c-stratification naturelle $\mathcal{C}_{\tilde{X}}$ définie par $\mathcal{C}_{\tilde{Y}}$ et $\mathcal{S}_{\tilde{X}}$ (cf[S] lemme(2.2.1)) vérifie les conditions de Whitney et la condition $A_{\tilde{F}}$ de Thom.

La démonstration se fait comme celle de [S] prop.(3.3).
La famille des composantes connexes des c-strates de $\mathcal{C}_{\tilde{X}}$ forment une stratification de Whitney de $\tilde{X}$, qui vérifie la propriété $A_{\tilde{F}}$ de Thom, notée encore $\mathcal{C}_{\tilde{X}}$. De plus, $\tilde{\mathcal{C}} = (\mathcal{C}_{\tilde{X}}, \mathcal{C}_{\tilde{Y}})$ est une stratification du morphisme $\tilde{F}$.

Soit $Z = F(X)$ et $\hat{Z}$ le transformé strict de Z par π. On peut supposer que $\hat{Z}$ est une union de strate de $\mathcal{S}_{\tilde{Y}}$. Par suite, c'est aussi une union de strate de $\mathcal{C}_{\tilde{Y}}$.

Soit $\hat{X}$ le transformé strict de X par π. Comme $\hat{X}$ est une union de composantes irréductibles de $\tilde{X}$, et que les strates de $\mathcal{C}_{\tilde{X}}$ sont connexes, $\hat{X}$ est une union de strates de $\mathcal{C}_{\tilde{X}}$.

<u>Assertion</u> : Il existe un ouvert de Zariski dense Ω' de S tel que, pour $s \in \Omega'$, on ait

1) $\tilde{Y}_s = \tilde{p}^{-1}(s)$ est le transformé strict de Y_s par π.

2) $\hat{Z}_s = \hat{Z} \cap \tilde{Y}_s$ est le transformé strict de $Z_s = Z \cap p^{-1}(s)$ par π

3) $\hat{X}_s = \hat{X} \cap (\tilde{p}o\tilde{F})^{-1}(s)$ est le transformé strict de X_s par π.

Démontrons le 1). Le 2) et le 3) se démontrent de la même manière.

Soit $E \subset \tilde{Y}$ le diviseur exceptionnel de π, qui est partout de codimension 1 dans $\tilde{Y}$. Il suffit de trouver Ω' tel que, pour $s \in \Omega'$, $E_s = E \cap \tilde{p}^{-1}(s)$ soit nulle part dense dans $\tilde{Y}_s$, puisque $\hat{Y}_s$ est l'adhérence dans $\tilde{Y}_s$ de $\tilde{Y}_s \setminus E_s$. L'existence de Ω' est alors claire.

Soit maintenant $\Omega'' = \Omega \cap \Omega'$. On peut appliquer le deuxième lemme d'isotopie au morphisme stratifié $\tilde{F} : \tilde{X}_{|\Omega''} \longrightarrow \tilde{Y}_{|\Omega''}$. Si s_1 et s_2 sont dans la même composante connexe de Ω'', $\tilde{F}_{s_1}$ et $\tilde{F}_{s_2}$ ont même type topologique. Comme $\hat{X}$ et $\hat{Z}$ sont union de strates, et que les homéomorphismes donnés par le deuxième lemme d'isotopie sont stratifiés, on en déduit que F_{s_1} et F_{s_2} ont même type topologique éclaté. On en déduit le théorème par une récurrence sur dimS.

Remarques : 1) l'utilisation du 2ème lemme d'isotopie de Thom-Mather nécessite l'hypothèse que les espaces stratifiés sont contenus dans des variétés lisses C^∞, et que les morphismes sont restrictions de morphismes C^∞ entre ces variétés. Le théorème suivant permet de justifier l'utilisation faite plus haut : théorème (voir [A-H]cor(3.2) par exemple): soit X un espace analytique réel et K un compact de X. Il existe une application analytique réelle $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^N$ qui est injective et propre, et qui est un plongement analytique en tout point de K.

2) On peut montrer, en utilisant seulement le critère donné par Hironaka ([H_2] th1 § 5, voir aussi [S] th.(1.2.1)) que si la dimension relative de Z sur s est partout ≤ 1, le nombre de types topologiques d'applications $F_s : X_s \longrightarrow Y_s$ est fini.

§ 2 FINITUDE LOCALE DU NOMBRE DE TYPES TOPOLOGIQUES

On considère dans ce paragraphe une famille d'applications analytiques $F : X \times S \longrightarrow Y \times S$ paramétrée par un espace analytique

$$\begin{tikzcd} X \times S \arrow[rr] \arrow[dr] & & Y \times S \arrow[dl] \\ & S & \end{tikzcd}$$

réduit S. On suppose que X et Y sont compacts, et que X est lisse, connexe, de dimension 2.

Théorème 2 : Sous ces conditions, le nombre de types topologiques d'applications $F_s : X \longrightarrow Y$, pour $s \in S$ est localement fini sur S.

On va montrer qu'il existe un ouvert de Zariski dense et lisse Ω de S tel que le type topologique de F_s soit constant sur chaque composante connexe de Ω. Le théorème s'en déduit par récurrence sur dimS. Soit $Z = F(X \times S)$. Si Z est génériquement de dimension relative ≤ 1 sur S, l'existence de Ω provient de la remarque faite à la fin du §1. On supposera donc que Z est de dimension relative 2 sur S, et que S est irréductible.

Considérons d'abord la situation générale suivante :

$G : T \longrightarrow Z$ est un morphisme propre, T et Z étant des espaces analytiques réduits, et $p : Z \longrightarrow S$ est un morphisme propre. On suppose $p \circ G$ surjectif, et S irréductible. Soit $\mathcal{S}$ une stratification de G.

<u>Lemme</u> : Il existe une modification propre $\pi : \widetilde{Z} \longrightarrow Z$, composée d'une suite propre d'éclatements, telle que pour tout sous ensemble analytique $\Sigma \subset Z$ génériquement de dimension relative ≤ 1 sur S, il existe des stratifications de Whitney de Z et de $\widetilde{G} : \widetilde{T} = T \underset{Z}{\times} \widetilde{Z} \longrightarrow \widetilde{Z}$, compatibles avec $\mathcal{S}$, Σ et $E = \pi^{-1}(\Sigma)$, faisant de π un morphisme stratifié, telles que :

- La stratification de $\widetilde{T}$ vérifie la condition $A_{\widetilde{G}}$

- Il existe un ouvert de Zariski dense et lisse Ω de S tel que la restriction au-dessus de Ω de la stratification de $\pi : E \longrightarrow \Sigma$ vérifie la condition A_{π}.

- Pour toute strate Z_β de Z, si $p(Z_\beta) \cap \Omega \neq \emptyset$, $p(Z_\beta) = \Omega$, et $p : Z_\beta \longrightarrow \Omega$ est une submersion.

<u>Démonstration du théorème 2</u> : On applique le lemme à $F : X\times S \longrightarrow Y\times S$. Soit $\Sigma \subset Y\times S$ la réunion des images des centres d'éclatements définissant π. Alors $\Sigma \subset F(X\times S)$ et est nulle part dense dans $F(X\times S)$. Par suite, les fibres de Σ sur S sont génériquement sur S de dimension ≤ 1. Σ vérifie donc la condition du lemme. Soit $\hat{F} : \widehat{X\times S} \longrightarrow \widetilde{Y\times S}$ le transformé strict de F par π. Comme $\widehat{X\times S}$ est une composante irréductible de $\widetilde{X\times S}$, c'est aussi une union de strates de la stratification donnée par le lemme. On considère le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\widehat{X\times S} \arrow[r, "\varpi"] \arrow[d, "\hat{F}"'] & X\times S \arrow[d, "F"] \\
\widetilde{Y\times S} \arrow[r, "\pi"'] \arrow[dr, "\tilde{p}"'] & Y\times S \arrow[d, "p"] \\
 & S
\end{tikzcd}$$

Remarquons que, d'après les hypothèses faites, ϖ est surjectif.

Le morphisme ϖ est, par définition, une suite d'éclatements, les centres étant les images inverses de ceux définissant π. Soit $\Theta \subset X\times S$ le plus petit sous-ensemble analytique fermé de $X\times S$ tel que le morphisme $\varpi : \widehat{(X\times S)} \setminus \varpi^{-1}(\Theta) \longrightarrow (X\times S) \setminus \Theta$ soit un isomorphisme. Alors $\Theta \subset F^{-1}(\Sigma)$. On a vu au § 1 qu'il existe un ouvert de Zariski dense et lisse de S tel que, pour tout s dans cet ouvert, $\widehat{(X\times S)}_s$ soit le transformé strict de $X\times\{s\}$ par ϖ.

Le morphisme $\varpi : \widehat{(X\times S)}_s \longrightarrow X\times\{s\}$ est donc une suite d'éclatements, l'image des centres étant la fibre Θ_s. Comme X est lisse, connexe de dimension 2, Θ_s est un nombre fini de points. Il existe donc un ouvert de Zariski dense et lisse Ω' de S tel que le morphisme $p \circ G : \Theta_{|\Omega'} \longrightarrow \Omega'$ soit un revêtement (non ramifié).

D'autre part, on sait que $\varpi^{-1}(F^{-1}(\Sigma)) = \hat{F}^{-1}(\pi^{-1}(\Sigma))$ est une union de strates de $\widehat{X\times S}$.

Il existe un ouvert de Zariski dense Ω'' de S tel que les fibres $F^{-1}(\Sigma)_s$, pour $s \in \Omega''$, soient de dimension ≤ 1. En effet, Σ est nulle part dense dans $F(X\times S)$, donc $F^{-1}(\Sigma)$ est nulle part dense dans $X\times S$ (qui est irréductible). On peut alors supposer, quitte à diminuer Ω'', que toute composante Γ de $F^{-1}(\Sigma)$ de dimension relative générique nulle est un revêtement (non ramifié) de Ω'', quand on la restreint à Ω''. On remarque que sur $\Omega' \cap \Omega''$, Γ est aussi une composante de $\Theta_{|\Omega' \cap \Omega''}$.

Soit maintenant $\Omega_1 = \Omega \cap \Omega' \cap \Omega''$, où Ω est l'ouvert donné par le lemme. On restreint alors la situation à Ω, et on veut montrer que pour s_1 et s_2 dans Ω_1, F_{s_1} et F_{s_2} ont même type topologique.

Soit η un champ de vecteur C^∞ sur Ω_1 (on se place en fait sur un ouvert relativement compact de S, contenu dans Ω_1). On va remonter ce champ en plusieurs étapes.

1) On peut relever η en un champ contrôlé ξ_Σ sur Σ (cf[M]).

2) On peut relever ξ_Σ en un champ ξ_E sur $E = \pi^{-1}(\Sigma)$, contrôlé au-dessus de ξ_Σ, d'après la propriété A_π.

3) On peut étendre ξ_E en un champ $\xi_{\widetilde{Y\times S}}$ sur $\widetilde{Y\times S}$, qui vérifie les conditions de contrôle entre strates de $\widetilde{Y\times S} \setminus E$, ou entre strates de $\widetilde{Y\times S} \setminus E$ et strates de E.

4) On peut relever $\xi_{\widetilde{Y\times S}}$ en un champ $\xi_{\widehat{X\times S}}$ sur $\widehat{X\times S}$, contrôlé au-dessus de $\xi_{\widetilde{Y\times S}}$.

Les résultats classiques de [M] montrent que si s_1 et s_2 sont sur une même ligne du champ η, le flot de $\xi_{\widetilde{Y\times S}}$ définit un homéomorphisme $\tilde{\varphi}: (\widetilde{Y\times S})_{s_1} \longrightarrow (\widetilde{Y\times S})_{s_2}$. Cet homéomorphisme induit un homéomorphisme $\tilde{\varphi}_E: E_{s_1} \longrightarrow E_{s_2}$, puisque E est une union de strates, et, puisque ξ_E provient d'un champ ξ_Σ, il existe un homéomorphisme φ_Σ rendant le diagramme suivant commutatif :

$$\begin{tikzcd} E_{s_1} \arrow[r, "\tilde{\varphi}_E"] \arrow[d, "\pi"'] & E_{s_2} \arrow[d, "\pi"] \\ \Sigma_{s_1} \arrow[r, "\varphi_\Sigma"'] & \Sigma_{s_2} \end{tikzcd}$$

L'homéomorphisme $\tilde{\varphi}$ définit un homéomorphisme φ : $Y\times\{s_1\} \longrightarrow Y\times\{s_2\}$. En effet, considérons le diagramme :

$$\begin{tikzcd} (\widetilde{Y\times S})_{s_1} \arrow[r, "\tilde{\varphi}"] \arrow[d, "\pi"'] & (\widetilde{Y\times S})_{s_2} \arrow[d, "\pi"] \\ Y\times\{s_1\} & Y\times\{s_2\} \end{tikzcd}$$

Il suffit alors de montrer que si deux points de $(\widetilde{Y\times S})_{s_1}$ ont même image par π, ils ont même image par π o $\tilde{\varphi}$. Comme π est un isomorphisme en dehors de E et Σ, et que $\tilde{\varphi}$ conserve E, il suffit de choisir ces deux points dans E_{s_1}. Mais si x_1, $x_1' \in E_{s_1}$ et si $\pi(x_1)=\pi(x_1')$, $\varphi_\Sigma o\ \pi(x_1) = \varphi_\Sigma o\ \pi(x_1')$, donc $\pi o\tilde{\varphi}_E(x_1) = \pi o\tilde{\varphi}_E(x_1')$ et $\pi o\tilde{\varphi}(x_1') = \pi o\tilde{\varphi}(x_1')$. Il existe donc un homéomorphisme φ qui fait commuter le diagramme ci-dessus.

Considérons maintenant l'homéomorphisme $\hat{\Psi} : (\widehat{X\times S})_{s_1} \longrightarrow (\widehat{X\times S})_{s_2}$ donné par l'intégration du champ $\xi_{\widehat{X\times S}}$. Il suffit de montrer qu'il définit un homéomorphisme Ψ : $X\times\{s_1\} \longrightarrow X\times\{s_2\}$ faisant commuter le diagramme

$$\begin{tikzcd} (\widehat{X\times S})_{s_1} \arrow[r, "\hat{\Psi}"] \arrow[d, "\varpi"'] & (\widehat{X\times S})_{s_2} \arrow[d, "\varpi"] \\ X\times\{s_1\} \arrow[r, "\Psi"'] & X\times\{s_2\} \end{tikzcd}$$

En effet, ϖ et π étant des isomorphismes sur des ouverts denses, la relation $\varphi \circ F_{s_1} = F_{s_2} \circ \Psi$ sera vérifiée sur un ouvert dense de $X \times \{s_1\}$, donc partout.

Soit $\Delta = \omega^{-1}(\Theta)$. Δ est une union de composantes irréductibles de $\varpi^{-1}(F^{-1}(\Sigma))$, les autres étant celles du transformé strict de $F^{-1}(\Sigma)$ par ϖ. Δ est donc une union de strates. Pour montrer l'existence de Ψ, il suffit de montrer que si deux points x_1 et x_1' de $(\widehat{X\times S})_{s_1}$ ont même image par ϖ, ils ont même image par $\varpi \circ \hat{\Psi}$. On peut supposer que ces deux points sont sur Δ, puisque ϖ est un isomorphisme en dehors de Δ.

Comme Θ est un revêtement de Ω, le champ η se remonte de manière unique en un champ C^∞ sur Θ, noté η_Θ. Le champ $\xi_{\widehat{X\times S}}$ restreint à Δ est donc un relèvement de η_Θ. Par suite les flots commutent à ϖ, et $\hat{\Psi}$ définit un homéomorphisme Ψ. □

<u>Démonstration du lemme</u> : D'après la prop.(3.1) de [S], il existe une c-stratification $\tilde{\mathcal{S}}$ de $\tilde{G} : \tilde{T} \longrightarrow \tilde{Z}$, c-compatible avec $\mathcal{S}$, et qui vérifie les propriétés suivantes (cf.[S] pour la définition d'une c-stratification) :
Pour toute c-strate T_α de $\tilde{T}$, $\tilde{G} : \bar{T}_\alpha \longrightarrow \tilde{G}(\bar{T}_\alpha)$ est une application ouverte, et pour tout $z \in \tilde{G}(T_\alpha)$ $\tilde{G}^{-1}(z) \cap T_\alpha$ est dense dans $\tilde{G}^{-1}(z) \cap \bar{T}_\alpha$. Enfin, tout couple de c-strates c-incidentes satisfait la propriété $W_{\tilde{G}}$, qui est une propriété plus forte que la propriété $A_{\tilde{G}}$ (cf[S]).
On peut supposer que la stratification $\tilde{\mathcal{R}}$ de $\tilde{Z}$ définie par $\tilde{\mathcal{S}}$ ($\tilde{\mathcal{S}}$ est la donnée d'une stratification $\tilde{\mathcal{C}}$ de $\tilde{T}$ et d'une stratification $\tilde{\mathcal{R}}$ de $\tilde{Z}$) est compatible avec E. On supposera que Σ est un sous-ensemble analytique fermé quelconque de Z, génériquement de dimension relative ≤ 1 sur S, et $E = \pi^{-1}(\Sigma)$. On fait alors l'hypothèse de récurrence suivante :

H_ℓ : Il existe un raffinement $\breve{\tilde{\mathcal{R}}}_\ell$ de $\tilde{\mathcal{R}}$, vérifiant les conditions de Whitney, une stratification de Whitney $\mathcal{R}_\ell$ de Z compatible avec Σ, et un ouvert de Zariski dense Ω_ℓ de S, tels que pour toute strate $\tilde{Z}_\beta$ de $\tilde{\mathcal{R}}_\ell$ de dimension $\geq \ell$, et telle que $\pi(\bar{\tilde{Z}}_\beta)$ soit une composante irréductible de Z,

1) $\pi(\tilde{Z}_\beta)$ est une strate de $\mathcal{R}_\ell$, et $\pi : \tilde{Z}_\beta \longrightarrow \pi(\tilde{Z}_\beta)$ est une submersion.

2) Si $\tilde{Z}_\beta \subset E$ et si $\tilde{Z}_\gamma \subset \tilde{\tilde{Z}}_\beta$, $(\tilde{Z}_\beta, \tilde{Z}_\gamma)$ satisfait la condition A_π au-dessus de Ω_ℓ.

3) $\tilde{\mathcal{R}}_\ell$ définit avec $\tilde{\mathcal{C}}$ une c-stratification naturelle $\tilde{\mathcal{C}}_\ell$ de $\tilde{T}$, qui vérifie les mêmes propriétés que $\tilde{\mathcal{C}}$ (voir [S] lemme (2.2.1)). Alors pour toute c-strate $\tilde{T}_\alpha$ de $\tilde{\mathcal{C}}_\ell$, d'image $\tilde{Z}_\beta$, et toute c-strate $\tilde{T}_\gamma$, si $\tilde{T}_{\alpha,i}$ est une composante connexe de $\tilde{T}_\alpha$ contenue dans $\tilde{\tilde{T}}_\gamma$, $(\tilde{T}_\gamma, \tilde{T}_{\alpha,i})$ vérifie les conditions de Whitney.

On va montrer que $H_{\ell+1} \Rightarrow H_\ell$.

Soit $\tilde{Z}_\beta$ une strate de dimension ℓ de $\tilde{\mathcal{R}}_{\ell+1}$, telle que $\pi(\tilde{\tilde{Z}}_\beta)$ soit une composante irréductible de Z. Soit $C_\beta(\pi)$ le lieu critique de π : $\tilde{\tilde{Z}}_\beta \longrightarrow \pi(\tilde{\tilde{Z}}_\beta)$, et soit H_β un sous-ensemble analytique fermé nulle part dense de $\tilde{\tilde{Z}}_\beta$, de sorte que la condition 3) de H_ℓ soit satisfaite sur $\tilde{Z}_\beta \setminus H_\beta$. Un tel sous-ensemble existe d'après [T] (voir [S] prop.(3.3) pour une démonstration). Soit $\tilde{H}_\beta$ le fermé nulle part dense de $\tilde{\tilde{Z}}_\beta$, réunion de $C_\beta(\pi)$, H_β, et $\tilde{\tilde{Z}}_\beta \setminus \tilde{Z}_\beta$.

Soit $\Gamma_\beta \subset \pi(\tilde{\tilde{Z}}_\beta)$ l'ensemble des points z tels que $\dim \pi^{-1}(z) \cap \tilde{H}_\beta \geq \dim_\pi \tilde{Z}_\beta$. Alors Γ_β est un fermé analytique nulle part dense dans $\pi(\tilde{\tilde{Z}}_\beta)$. On raffine la stratification $\mathcal{R}_{\ell+1}$ en une stratification $\mathcal{R}_\ell$ compatible avec les Γ_β.

Soit Z_1 la réunion des strates nulles part denses dans Z de $\mathcal{R}_\ell$. $\tilde{Z} \setminus (\pi^{-1}(Z_1) \cup \bigcup_\beta \tilde{H}_\beta)$ est maintenant stratifié par les strates $\tilde{Z}_\gamma \setminus \pi^{-1}(Z_1)$, pour $\dim \tilde{Z}_\gamma \geq \ell+1$, et $\tilde{Z}_\beta \setminus (\pi^{-1}(Z_1) \cup \tilde{H}_\beta)$ pour $\dim \tilde{\tilde{Z}}_\beta = \ell$, et les propriétés 1) et 3) sont satisfaites. On stratifie alors $\pi^{-1}(Z_1) \cup \bigcup_\beta \tilde{H}_\beta$, de manière compatible avec $\tilde{\mathcal{R}}_{\ell+1}$, et de sorte que la propriété 2) soit satisfaite. Ceci est possible en utilisant le fait que Σ est de dimension relative générique ≤ 1 sur S, et le critère d'Hironaka pour la condition A_π ([H]th1 §5, voir aussi [S] th.(1.2.1)). On obtient alors H_ℓ.

H_ℓ étant vraie pour $\ell \geq \dim\tilde{Z}$, H_o est vraie. On fait alors une récurrence sur dimZ pour obtenir le lemme. □

§ 3 L'EXEMPLE DES APPLICATIONS POLYNOMIALES

Soit $P_d : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^N \longrightarrow \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^N$ la famille des applications polynomiales de degré $\leq$ d de $\mathbb{C}^n$ dans $\mathbb{C}^p$, où $\mathbb{C}^N$ est l'espace des coefficients.

Corollaire 1 : Le nombre de types topologiques éclatés apparaîssant dans la famille P_d est fini.

Démonstration : On considère dans $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^1 \times \ldots \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^N$ l'adhérence G du graphe de P_d, considérée comme application de $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^N$ dans $\mathbb{C}^m$. On stratifie le morphisme $p : G \longrightarrow \mathbb{P}^1 \times \ldots \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^N$ de manière compatible à $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^N$ et $\mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^N$. On peut alors lui appliquer le th.1. Les homéomorphismes obtenus étant stratifiés, on en déduit le corollaire 1.

Corollaire 2 : Le nombre de types topologiques apparaîssant dans la famille $P_d : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^N \longrightarrow \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^N$ est fini.

La démonstration se fait comme dans le th.2 : On peut appliquer le lemme au morphisme $p : G \longrightarrow \mathbb{P}^1 \times \ldots \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^N$. Seule l'existence du morphisme Ψ impose la lissité des fibres de p. Les stratifications et les champs de vecteurs étant construits pour p, on se restreint à $\mathbb{C}^2 \times \mathbb{P}^N$ pour l'existence de Ψ. □

Bibliographie

[A] K. Aoki : On topological types of polynomial map germs of plane toplane. Preprint.

[A-H] A. Andreotti, P. Holm : Quasianalytic and Parametric spaces. Real and complex singularities. Oslo 1976.

[F] T. Fukuda : Types Topologiques des polynômes. Publ. Math. I.H.E.S. 46(1976) 87-106.

[H_1] H. Hironaka : Flattening theorem in complex analytic geometry. Amer J. of Math vol 97 n° 2 (1975).

[H_2] H. Hironaka : Stratifications and Flatness. Real and Complex Singularities. Oslo 1976. P. Holm Ed. Noordhoff 1977.

[H_3] H. Hironaka : La voûte étoilée. Singularités à Cargèse Astérisque n°7/8. 1973.

[M] J. Mather : Notes on topological stability. Preprint.

[N] I. Nakai : On topological types of polynomial map germs. Preprint.

[S] C. Sabbah : Morphismes stratifiés sans éclatement et cycles évanescents. Preprint.

[T] B. Teissier : Variétés Polaires locales et conditions de Whitney. C.R. Acad. Sc. t.290 (1980) 799-802.

[Th] R. Thom : La stabilité topologique des applications polynomiales. Enseign. Math. 8 (1962) 24-33.