ESPACES CONORMAUX BIVARIANTS

C. SABBAH

Centre de Mathématiques de l'Ecole Polytechnique
- Plateau de Palaiseau - 91128 Palaiseau Cedex

"Unité Associée au C.N.R.S. n° 169"

M681.1084 Octobre 1984

INTRODUCTION

R. Mac Pherson a résolu le problème suivant dans [M] : Associer à toute fonction constructible à valeurs entières α sur un espace analytique réduit X une classe d'homologie $c_*(\alpha) \in H_*(X,\mathbb{Z})$ telle que si $f : X \to Y$ est un morphisme propre, on ait $f_*(c_*(\alpha)) = c_*(f_*(\alpha))$ dans $H_*(Y,\mathbb{Z})$, où $f_*(\alpha)$ est la fonction constructible sur Y définie par $f_*(\alpha)(y) = \chi(f^{-1}(y),\alpha$ (caractéristique d'Euler de $f^{-1}(y)$ pondérée par α) (voir [M]) .

Si on considère une famille $f : X \to S$, et si la fonction constructible définit une famille $(\alpha|_{X_s})_{s\in S}$ de fonctions constructibles (c'est-à-dire si α vérifie la condition d'Euler locale (voir [F.M.] § 6 ou ci-dessous § 1)) la question se pose de savoir si les classes $c_*(\alpha|_{X_s})$ se mettent en famille

Pour poser ce problème correctment, W. Fulton et R. Mac Pherson ont int dans [F.M.] la notion de théorie bivariante (voir aussi [F] chap. 17). Il s' alors de construire une transformation naturelle c_* de la théorie bivariant des fonctions constructibles $\mathbb{F}$ dans l'homologie bivariante.

Ce problème a été résolu par J.P. Brasselet [Br] (et dans le cas où dim S par J-L. Verdier [V 2]) en utilisant les techniques de M.H. Schwarz développé dans [Br - S].

Dans cette note, j'aborde le problème en utilisant le point de vue de [(ou plus exactement la légère modification qui en est faite dans [S 1]) . Je construis une théorie bivariante Z de cycles relatifs et un isomorphisme d'Euler entre les théories bivariantes Z et $\mathbb{F}$. La construction de Z se fait en considérant des espaces conormaux bivariants, et les démonstrations sont analogues à celles données dans [S 1] . La construction d'une classe de Chern se ramène alors à celle d'une classe de Chern - Mather (voir [M],[G-V],[S 1]) qui se ramène elle-même à celle d'une classe fondamentale relative pour les cycles conormaux bivariants.

Je ne sais pas démontrer l'existence d'une classe fondamentale pour les cycles conormaux bivariants (définis au § 2) en général. Quand les cycles sont à coefficients positifs, ou quand dim $S = 1$, l'existence d'une telle classe est connue : A coefficients complexes, cela résulte par exemple de [B 2], on peut aussi utiliser [V 1]. Il est cependant probable (au vu de [Br]) qu'une telle classe fondamentale existe.

De plus, l'existence d'une telle classe supposée connue, je ne sais pas montrer non plus que la classe de Chern ainsi construite coïncide avec celle de J-P. Brasselet [Br].

Je tiens à remercier J-L. Brylinski, W. Fulton et R. Mac Pherson pour les conversations que j'ai eues avec eux à ce sujet, au cours d'un séjour à l'Université de Brown.

1. La théorie bivariante des fonctions constructibles.

On rappelle ici la définition du groupe $\mathbb{F}(X \to S)$ donnée dans [F-M] chap. 6 (voir aussi [Br]).

Soit X un espace analytique réduit. On note $\mathbb{F}(X)$ le groupe des fonctions constructibles sur X, à valeurs entières. Soit $f : X \to S$ un morphisme analytique.

(1.1) Définition : Le groupe $\mathbb{F}(X \xrightarrow{f} S)$ est le sous groupe de $\mathbb{F}(X)$ formé des fonctions constructibles α qui vérifient la propriété suivante, dite condition d'Euler locale :

Pour tout $x_o \in X$, si on choisit un plongement local au voisinage de x_o

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook] \arrow[d, "f"'] & S \times \mathbb{C}^n \arrow[dl] \\ S & \end{tikzcd}$$

et si B_ε est la boule de $\mathbb{C}^n$ centrée en 0, de rayon ε, alors, pour tout $\varepsilon > 0$ aseez petit, et tout $s \in S$ assez proche de $f(x_o)$, la caractéristique d'Euler pondérée par α

$$\chi(\{s\} \times B_\varepsilon \cap f^{-1}(s), \alpha) \text{ ne dépend pas de } s,$$

et vaut donc $\chi(\{f(x_o)\} \times B_\varepsilon \cap f^{-1}(f(x_o)), \alpha) = \alpha(x_o)$.

Rappelons que si α est une fonction constructible sur un espace analytique Z, $\chi(Z,\alpha)$ se calcule en considérant une stratification de Whitney (Z_λ) de Z sur les strates de laquelle α est constante, et on a :

$$\chi(Z,\alpha) = \sum_\lambda \alpha|_{Z_\lambda} \chi(Z_\lambda) , \quad \text{(voir [M])}.$$

On peut définir les opérations suivantes sur les fonctions constructibles :

- Changement de base :

Soit $h : S' \to S$ un morphisme et $\alpha \in \mathbb{F}(X)$. Soit g le morphisme induit par h, $g : (X \times_S S')_{red} \to X$. Alors $h^*\alpha : \alpha \circ g$ est une fonction constructible sur $(X \times_S S')_{red}$.

- Image directe par un morphisme propre :

Soit $\varphi : X \to Y$ un morphisme propre et $\alpha \in \mathbb{F}(X)$.

On pose (voir [M]) : $f_*\alpha(y) = \chi(f^{-1}(y),\alpha)$ pour $y \in Y$.

- Produit

Soit $X \xrightarrow{\varphi} Y$ un morphisme propre, et $\alpha \in \mathbb{F}(X)$, $\beta \in \mathbb{F}(y)$.

On pose $\alpha . \beta := \alpha . (\beta \circ \varphi) \in \mathbb{F}(X)$.

(1.2) Proposition ([F.M],chap. 6) : Les opérations précédentes font de $\mathbb{F}$ une théorie bivariante.

Cela signifie que si $\alpha \in \mathbb{F}(X \to S)$, $h^*\alpha \in \mathbb{F}(X \times_S S' \to S')$, etc ...

Le théorème (4.1) fournira une autre démonstration de ce résultat.

(1.3) Remarque :

On dit qu'une application $f : X \to S$ est une application d'Euler si la fonction constructible constante $\mathbb{1}_X$ est dans $\mathbb{F}(X \xrightarrow{f} S)$. Cela implique que $\chi(f^{-1}(s))$ est localement constant sur S.

Si f est un éclatement, il n'existe aucune fonction $\alpha \in \mathbb{F}(X \to S)$ génériquement égale à 1 sur X. Par contre, si f est plat, ou si f définit une famille analytique de cycles ([B 1]), une telle fonction existe au moins localement puisque f est composé localement d'un morphisme fini et d'un morphisme lisse : on utilise alors le produit bivariant pour trouver α.

(1.4) Remarque :

Soit $\mathcal{F}^\bullet$ un complexe borné de faisceaux, à cohomologie constructible sur X. Soit $\chi(\mathcal{F}^\bullet) \in \mathbb{F}(X)$ la fonction définie par $\chi(\mathcal{F}^\bullet)(x) = \sum_i (-1)^i \dim \mathcal{H}^i(\mathcal{F}^\bullet)_x$.
La condition d'Euler locale pour $\alpha = \chi(\mathcal{F}^\bullet)$ se traduit par :

pour toute courbe analytique $\gamma : (\mathbb{D},0) \to (S,s_o)$, considérons le complexe $\gamma^{-1}(\mathcal{F}^\bullet)$ sur $(X \underset{S}{\times} \mathbb{D})_{red}$. Alors $\chi(R\Phi(\gamma^{-1}(\mathcal{F}^\bullet))) = 0$.
Ici $R\Phi(\gamma^{-1}(\mathcal{F}^\bullet))$ désigne le complexe des cycles évanescents (voir [D]) pour le morphisme $(X \underset{S}{\times} D)_{red} \to \mathbb{D}$ sur la fibre $(X_{s_o})_{red}$

2. La théorie bivariante $\mathcal{Z}$.

Dans ce paragraphe, nous définissons le groupe $\mathcal{Z}(X \to S)$. Les opérations bivariantes associées seront exhibées au § 4 .

Soit $f : X \to S$ un morphisme propre. On fixe un plongement relatif dans une variété lisse de dimension n :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook] \arrow[d, "f"'] & S \times M \arrow[dl] \\ S & \end{tikzcd}$$

On va définir le groupe $\mathcal{Z}(X \overset{f}{\to} S)$ à l'aide de ce plongement, et on verra par la suite qu'il n'en dépend pas.

(2.1) Rappelons d'abord la définition du groupe $\mathcal{Z}(X \to S)$ quand S est une courbe lisse (voir [S 1], § 4).

Soit $Z = \sum n_i Z_i$ un cycle de X , où pour tout i , Z_i est un sous-ensemble analytique fermé irréductible de X . On dit que Z définit un cycle bivariant si la restriction $f|_{Z_i}$ est un morphisme ouvert pour toute composante Z_i de Z .
On note $f|_Z$ le cycle bivariant associé.

(2.2) Cas général.

Soit Z un sous-ensemble analytique fermé irréductible de X .

2.2.1) Définition : L'espace conormal relatif $T^*_{f|_Z} M$ est l'adhérence dans $S \times T^*M$ du fibré conormal relatif $T^*_{f|_{Z^o}} M$, où Z^o est l'ouvert de Zariski dense de Z sur lequel f est de rang maximum. On note $\overset{\circ}{C}(f|_{Z},M)$ le projectifié dans $S\times \mathbb{P}(T^*M)$ de $T^*_{f|_Z}M$. On a un morphisme naturel

$$T^*_{f|_Z}M \xrightarrow{\tau_f} Z \xrightarrow{f|_Z} S \text{ , ou encore } C(f|_Z,M) \xrightarrow{\tau_f} Z \xrightarrow{f|_Z} S \text{ .}$$

Si Z est un cycle de X, $Z = \Sigma\, n_i Z_i$, on pose $T^*_{f|_Z}M := n_i\, T^*_{f|_{Z_i}}M$. C'est un cycle de $S\times T^*M$.

Soit $\pi : \tilde{S} \to S$ une modification propre. On a alors un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc}
\tilde{S}\times M & \hookleftarrow & (X\underset{S}{\times}\tilde{S})_{red} = \tilde{X} & \xrightarrow{\overline{\omega}} & X & \longrightarrow & S\times M \\
 & \searrow & \downarrow{\scriptstyle\tilde{f}} & & \downarrow{\scriptstyle f} & \swarrow & \\
 & & \tilde{S} & \xrightarrow[\pi]{} & S & &
\end{array}$$

(2.2.2) Définition : Un élément de $Z(X\to S)$ est un cycle Z de X, $Z = \Sigma\, n_i Z_i$, satisfaisant les propriétés suivantes :

a) Pour tout i, $f(Z_i)$ est une composante irréductible de S.

b) Il existe une modification propre et surjective $\pi : \tilde{S}\to S$, où $\tilde{S}$ est normal, telle que le transformé strict $\hat{Z} := \Sigma\, n_i \hat{Z}_i$ de Z par π vérifie :

b_1) Pour tout i, le morphisme naturel

$$C(\tilde{f}_{|\hat{Z}_i},M) \longrightarrow \tilde{S} \qquad \text{est ouvert .}$$

b_2) Si $\tilde{s}$ et $\tilde{s}' \in \pi^{-1}(s)$, les fibres $C(\tilde{f}|_{\hat{Z}},M)_{\tilde{s}}$ et $C(\tilde{f}|_{\hat{Z}},M)_{\tilde{s}'}$ sont égales.

On notera $f|_Z$ le cycle bivariant défini par Z.

(2.2.3) Remarques et exemples.

1) Puisque $\tilde{S}$ est normal, la condition b_1) signifie que pour tout i $C(\tilde{f}|_{\hat{Z}_i},M)\to S$ définit une famille analytique de cycles de $\mathbb{P}(T^*M)$, au sens de $[B_1]$. De plus, en utilisant par exemple le théorème d'aplatissement d'Hironaka ($[H_1]$), il revient au même de supposer dans b_1) que le morphisme est plat.

2) Quand S est une courbe lisse, les deux définitions coïncident.

3) Soit $s \in S$. On note $j_s : \{s\} \to S$ l'inclusion. A tout élément $f|_Z \in \mathcal{Z}(X \xrightarrow{f} S)$ on peut associer une famille de cycles $j_s^*(f|_Z)$ de X paramétrée par S.
En effet, d'après [H 2] ou [H.M.S.] Cor (4.2.3.), il existe pour $\tilde{s} \in \tilde{S}$ un unique cycle $\tilde{T}_{\tilde{s}}$ de $\hat{f}^{-1}(\tilde{s})_{red}$ tel que l'on ait

$$C(\tilde{f}|_{\hat{Z}}, M)_{\tilde{s}} = C(\tilde{T}_{\tilde{s}}, M).$$

Par définition (b_2) ce cycle ne dépend pas de $\tilde{s} \in \pi^{-1}(s)$.
On note alors $\tilde{T}_{\tilde{s}} = j_s^*(f|_Z) \in \mathcal{Z}(|f^{-1}(s)|) = \mathcal{Z}(|f^{-1}(s)| \to pt)$.

4) Soit Z un cycle <u>positif</u> de X. Alors Z définit un élément $f|_Z$ de $\mathcal{Z}(X \xrightarrow{f} S)$ si et seulement si, quitte à remplacer la structure analytique de S par la structure réduite maximale (celle rendant holomorphe les fonctions continues génériquement holomorphes [Fi] p. 123), le morphisme $C(f|_Z, M) \to S$ définit une famille analytique de cycles de dimension dim M-1 de $\mathbb{P}(T^*M)$, paramètrée par S, au sens de [B 1].

En effet, notons $\mathcal{E}(\mathbb{P}(T^*M))$ l'espace analytique réduit des cycles compacts de dimension dim M-1 de $\mathbb{P}(T^*M)$ (voir [B 1]). Alors le morphisme $C(\tilde{f}|_{\hat{Z}}, M) \to \tilde{S}$ définit un morphisme analytique $\psi : \tilde{S} \to \mathcal{E}(\mathbb{P}(T^*M))$, avec $\psi(\tilde{s}) = C(\tilde{f}|_{\hat{Z}}, M)_{\tilde{s}}$.
Il existe d'après (b_2) une application continue φ (car π est propre) faisant commuter le diagramme

$$\begin{tikzcd} \tilde{S} \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\pi"'] & \mathcal{E}(\mathbb{P}(T^*M)) \\ S \arrow[ur, "\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

On en déduit le résultat.

On voit en particulier que dans ce cas la restriction $f|_{Z_i}$ est sans éclatement en codimension 0 ([H.M.S] § 4) pour tout i. Ce n'est pas le cas si Z n'est pas à coefficients positifs.

5) On pose $X = \mathbb{C}^3$ et $S = \mathbb{C}^2$, et on considère le morphisme plat défini par $f(x,y,z) = (x^2 - y^2 z, y)$. On sait (voir [S 2]) que ce morphisme a de l'éclatement c'est-à-dire que X ne définit pas un élément de $\mathcal{Z}(X \xrightarrow{f} S)$.

Soit $Y \subset X$ défini par l'équation $x=0$. On peut vérifier que le cycle $Z = X - Y$ définit un élément $f|_Z$ de $Z(X \xrightarrow{f} S)$. En particulier $j_o^* f|_Z$ est l'axe $\mathcal{O}_z$ compté 2 fois. Expliquons ce phénomène :

Puisque le morphisme $C(f|_X, M) \to S$ n'est pas plat, pour tout germe de courbe analytique $\gamma : (\mathbb{C},0) \to (S,s)$ la fibre en 0 $\widehat{C(f|_X, M)}_{\gamma,0}$ du transformé strict par γ de $C(f|_X, M)$ a des composantes mobiles (i.e. qui dépendent de γ) et des composantes fixes (i.e. qui n'en dépendent pas).
Il en est de même pour $C(f|_Y, M)$. Cependant, pour tout γ, les composantes mobiles pour X et pour Y coïncident et sont de multiplicité opposée. On applique alors le résultat suivant :

<u>Critère valuatif</u> : Un cycle $Z = \Sigma\, n_i Z_i$ définit un élément $f|_Z$ de $Z(X \to S)$ si et seulement si il satisfait la condition a) de (2.2.2) et il existe un ouvert de Zariski dense S^o de S tel que pour tout germe analytique $\gamma : (\mathbb{C},0) \to (S;s)$ avec $\gamma(\mathbb{C} \setminus \{0\}) \subset S^o$, le cycle transformé strict $\widehat{C(f|_Z, M)}_\gamma := \Sigma\, n_i\, \widehat{C(f|_{Z_i}, M)}_\gamma$ ait une fibre au-dessus de 0 ne dépendant que de s et pas de γ.

6) Quand Z n'est pas à coefficients positifs, il se peut que la famille $j_s^*(f|_Z)$ ne soit pas la famille des fibres d'un cycle de X . Le graphe de cette famille n'est pas nécessairement fermé.

7) On peut symétriser l'espace analytique $\mathcal{C}(\mathbb{P}(T^* M))$ en l'espace topologique $\widetilde{\mathcal{C}}(\mathbb{P}(T^* M))$, espace des cycles de dimension $\dim M-1$ de $\mathbb{P}(T^* M)$ à coefficients dans $\mathbb{Z}$. Pour cela on considère la relation d'équivalence sur $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$ définie par
$(\Gamma_1, \Gamma_2) \sim (\Gamma_1', \Gamma_2') \Leftrightarrow \Gamma_1 + \Gamma_2' = \Gamma_1' + \Gamma_2$.
Le graphe de cette relation est analytique fermé, d'après [B 1].
Nous ne considérons que la structure topologique de $\widetilde{\mathcal{C}}(\mathbb{P}(T^* M)) = \mathcal{C} \times \mathcal{C} / \sim$.

De même qu'en 4), on voit que Z définit un élément $f|_Z \in Z(X \to S)$ si et seulement si le morphisme $C(f|_Z, M) \to S$ définit une application continue $\varphi : S \to \widetilde{\mathcal{C}}(\mathbb{P}(T^* M))$.

3. Obstruction d'Euler locale relative.

Soit $f|_Z \in \mathcal{Z}(X \xrightarrow{f} S)$ et soit $x \in X$.

Soit $j_{f(x)} : f(x) \hookrightarrow S$ l'inclusion. On a défini un cycle dans $f^{-1}(f(x))_{red}$ noté $j^*_{f(x)}(f|_Z)$. On pose $\check{Eu}_{f|_Z}(x) := \check{Eu}_{j^*_{f(x)} f|_Z}(x)$.

Le terme de droite est défini par Ma Pherson ([M]) ainsi que Gonzalez-Verdier [G - V] (voir [S 1] pour la notation $\check{Eu}$).

(3.1) Proposition : L'application $\check{Eu}$ définit un isomorphisme $\mathcal{Z}(X \to S) \to \mathbb{F}(X \to S)$.

On montre d'abord que si $f|_Z \in \mathcal{Z}(X \to S)$, $\check{Eu}_{f|_Z}$ est une fonction constructible sur X.

(3.2) Lemme : On suppose que Z est réduit et irréductible et que le morphisme naturel $C(f|_Z, M) \to S$ est plat. Alors $\check{Eu}_{f|_Z}$ est constructible sur X.

Preuve : Soit $Y \subset X$ un sous-ensemble analytique fermé irréductible de X. On montre que $\check{Eu}_{f|_Z}$ est constant sur un ouvert de Zariski dense de Y. On peut supposer $Y \subset Z$.

1er cas : $f(Y) = S$.

On considère l'éclatement de l'image inverse de Y dans $C(f|_Z, M)$ et on a un diagramme ([T],[H-M-S]) :

$$\begin{tikzcd}
E_Y C(f|_Z, M) \arrow[r, "\tilde{e}_Y"] \arrow[d] \arrow[dr, "\zeta_f"] & C(f|_Z, M) \arrow[d, "\tau_f"] \\
E_Y Z \arrow[r, "e_Y"'] & Z \arrow[d, "f"] \\
 & S
\end{tikzcd}$$

Il existe alors un ouvert de Zariski dense S^o de S tel que pour tout $s \in S^o$ la fibre $(f \circ \zeta_f)^{-1}(s)$ soit égale au transformé strict de $(f \circ \tau_f)^{-1}(s)$ par e_Y.

On considère un ouvert dense Y^o vérifiant les propriétés suivantes :

- Y^o est lisse et $f|_{Y^o}$ est de rang constant.
- $Y^o \subset f^{-1}(S^o)$
- Le morphisme $\zeta_f : \zeta_f^{-1}(Y^o) \to Y^o$ est à fibres équidimensionnelles

Alors $\check{\mathrm{Eu}}_{f|_Z}$ est constant sur Y° (voir par exemple [T] ou [H-M-S]).

<u>2ème cas</u> : $f(Y) \neq S$.

On peut se ramener au cas précédent. Considérons le diagramme

$$\begin{tikzcd}
 & C(f|_Z, M) \times_S Y \arrow[r] \arrow[d] & C(f|_Z, M) \arrow[d] \\
Y \arrow[r, "\Delta"'] & Z \times_S Y \arrow[r] \arrow[d] & Z \arrow[d, "f"] \\
 & Y \arrow[r, "f|_Y"'] & S
\end{tikzcd}$$

Δ est l'inclusion diagonale. On remplace Z par la réunion des composantes de $Z \times_S Y$ d'image Y. On utilise alors [H-M-S] cor. (4.2.3). □

On déduit facilement du lemme (3.2) la constructibilité de $\check{\mathrm{Eu}}_{f|_Z}$ pour $f|_Z \in \mathcal{Z}(X \to S)$.

Pour montrer que $\check{\mathrm{Eu}}_{f|_Z} \in \mathbb{F}(X \to S)$ il suffit de même de le montrer dans la situation du lemme (3.2). Cela résulte simplement de [S 1], théorème (4.3).

L'injectivité de $\check{\mathrm{Eu}}$ se montre comme dans le cas absolu (voir [M]). Il reste à montrer la surjectivité.

Soit $\alpha \in \mathbb{F}(X \to S)$. On peut écrire $\alpha = \sum_{i \in 1} n_i \, 1\!\!1_{Z_i}$

Considérons les composantes $(Z_j)_{j \in J}$ de dimension maximum, et qui se surject sur une composante de S.

Il existe d'après [H 1] une modification propre $\pi : \tilde{S} \to S$, avec $\tilde{S}$ normal, telle que le transformé strict $\tilde{f}|_{\hat{Z}_j}$ de $f|_{Z_j}$ pour π satisfasse les propriétés a) et b_1) de la définition (2.2.2).

Soit $\beta = \varpi^* \alpha - \sum_{j \in J} (-1)^{d_j} n_j \check{\mathrm{Eu}}_{\tilde{f}|_{\hat{Z}_j}}$, où d_j est la dimension relative de $\hat{Z}_j$. Alors $\beta \in \mathbb{F}(\tilde{X} \xrightarrow{\tilde{f}} \tilde{S})$.

Si on pose $\beta = \sum m_k \, 1\!\!1_{T_k}$, la dimension maximum des composants T_k qui se surjectent sur une composante de $\tilde{S}$ a strictement diminué.

On en déduit par récurrence que $\beta \in \check{\mathrm{Eu}}(\mathcal{Z}(\tilde{X} \xrightarrow{\tilde{f}} \tilde{S}))$, ainsi que $\varpi^* \alpha$.

Par suite $\alpha \in \check{\mathrm{Eu}}(\mathcal{Z}(X \to S))$. □

4. Opérations bivariantes pour les espaces conormaux

Dans ce paragraphe nous montrons le résultat suivant :

(4.1) Théorème :

1) On peut munir de manière naturelle $\mathcal{Z}$ d'opérations qui en font une théorie bivariante.

2) L'isomorphisme d'Euler est compatible avec les opérations bivariantes sur $\mathcal{Z}$ et $\mathbb{F}$, et par suite, $\mathbb{F}$ est aussi une théorie bivariante.

Preuve du Théorème.

(4.2) Changement de base

On a déjà défini le changement de base pour l'inclusion $j_s : \{s\} \to S$. La définition est analogue dans le cas général d'un morphisme $h : S' \to S$. On garde les notations de (2.2.2).

Soit $f|_Z \in \mathcal{Z}(X \xrightarrow{f} S)$. On pose $Z = \Sigma n_i Z_i$. Soit $\tilde{S}'$ le normalisé de $(S' \times_S \tilde{S})_{red}$ et $\tilde{X}' = (X \times_S \tilde{S}')_{red}$. On a le diagramme commutatif suivant pour tout i :

$$\begin{array}{ccc} C(\tilde{f}|_{\hat{Z}_i}, M) \times_{\tilde{S}} \tilde{S}' & \longrightarrow & C(\tilde{f}|_{\hat{Z}_i}, M) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \tilde{S}' & \longrightarrow & \tilde{S} \end{array}$$

et d'après [H-M-S] cor.(4.2.3), il existe un unique cycle $\hat{Z}'_i$ de $\tilde{X}'$ ($\hat{Z}'_i$ n'est pas nécessairement irréductible) tel que $C(\tilde{f}|_{\hat{Z}_i}, M) \times_{\tilde{S}} \tilde{S}' = C(\tilde{f}|_{\hat{Z}'_i}, M)$.

On considère le cycle $\Sigma n_i \hat{Z}'_i$ dans $\tilde{X}'$, et on pose $Z' = \Sigma n_i Z'_i$, où Z'_i est l'image de $\hat{Z}'_i$ dans $X' = (X \times_S S')_{red}$.

On vérifie facilement que Z' définit un élément $f'|_{Z'} \in \mathcal{Z}(X' \xrightarrow{f'} S')$.

On pose $h^*(f|_Z) = f'|_{Z'}$.

D'autre part, il est clair que si $s \in S$ et $s' \in h^{-1}(s)$, on a $j_s^*(f|_Z) = j_{s'}^*(f'|_{Z'})$. Ceci implique que pour tout $x \in X$ et tout $x' \in X'$ au-dessus de x on a $\check{Eu}_{f|_Z}(x) = \check{Eu}_{f'|_{Z'}}(x')$.

(4.3) Image directe

On considère la situation suivante :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "f"'] & & Y \arrow[dl, "g"] \\ & S & \end{tikzcd}$$

avec $g \circ \varphi = f$. Soit $f|_Z \in Z(X \xrightarrow{f} S)$. On va définir un cycle $\varphi_*(f|_Z) \in Z(X \xrightarrow{g} S)$. Quand S est réduit à un point, on retrouve la définition de [M] ou [S 1].

On suppose qu'on a des plongements

$$X \subset S \times M \times N \quad , \quad Y \subset S \times N \quad , \quad M \text{ et } N \text{ lisses,}$$

et que f, φ, g sont induits par les projections naturelles.

1er cas : Z est réduit et irréductible, et le morphisme naturel $C(f|_Z, M) \to S$ est plat. On considère alors dans $S \times T^*(M \times N)$ les cycles $T^*_{f|_Z}(M \times N)$ et $S \times M \times T\ N$. Soit r la projection $S \times M \times T\ N \to S \times T^*N$.

On montre, comme dans [S 1], théorème (2.2), qu'il existe un unique cycle de $S \times T^*N$, relativement lagrangien, de classe fondamentale égale à $r_*(T^*_{f|_Z}(M \times N) \,.\, (S \times M\ \ T^*N))$. Pour cela, il suffit de rendre relatifs les lemmes (2.4.1) et (2.4.2) de [S 1] en remplaçant la condition a) de Whitney par la condition A_f de Thom. C'est possible puisque $f|_Z$ est sans éclatement en codimension 0.

On définit $\varphi_*(f|_Z)$ de sorte que

$$T^*_{\varphi_*(f|_Z)} N = r_*(T^*_{f|_Z}(M \times N) \,.\, (S \times M \times T^*N)) .$$

<u>2ème cas</u> : <u>Cas général</u>.

Soit $f|_Z \in \mathcal{Z}(X \to S)$. On peut faire la construction précédente après un changement de base $\pi : \widetilde{S} \to S$. Il faut alors vérifier que la condition b_2) de (2.2.2) est satisfaite pour $\varphi_*(\widetilde{f}|_{\widetilde{Z}})$. Ceci permettra de définir $\varphi_*(f|_Z)$. Pour cela, il suffit de vérifier que la construction précédente est compatible au changement de base $j_s : \{s\} \to S$. Cela montrera aussi par la même occasion la deuxième partie du théorème (4.1) pour l'image directe. On se replace donc dans le premier cas. On note $Z_s = j_s^*(f|_Z)$.
D'après [S 1], théorème (2.2), la fibre $T^*_{\varphi_*(f|_Z)}N|_s$ et $T^*_{\varphi_*(Z_s)}N$ ont leur support dans $r(|T^*_{Z_s}(M \times N)| \cap (\{s\} \times M \times T^*N))$, et il suffit de montrer l'égalité des classes fondamentales.

Supposons d'abord que S est lisse.
On considère les deux sous-variétés de $S \times T^*(M \times N)$ suivantes : $\{s\} \times T^*(M \times N)$ et $S \times M \times T^*N$. Ces deux sous-variétés sont transverses.
Comme le morphisme $T^*_{f|_Z}(M \times N) \to S$ est plat, on a :

$$[T^*_{Z_s}(M \times N)] = T^*_{f|_Z}(M \times N) \; . \; \{s\} \times T^*(M \times N) \; ,$$

l'intersection étant prise au sens de [F] (voir par exemple [S 1], appendice ou [F]).

Tout revient donc à démontrer l'égalité suivante dans $H_*(|T^*_{Z_s}(M \times N)| \cap \{s\} \times M \times T^*N)$:

$$(T^*_{f|_Z}(M \times N) \; . \; \{s\} \times T^*(M \times N)) \; . \; (\{s\} \times M \times T^*N) = (T^*_{f|_Z}(M \times N) \; . \; S \times M \times T N) . (\{s\} \times T^*(M$$

Cette commutativité de l'intersection est démontrée dans [S 1], appendice ou [F] théorème (6.4) dans le cadre algébrique.

Quand S n'est pas lisse, l'assertion à démontrer étant locale en s, on plonge localement S dans une variété lisse T. Il suffit alors de vérifier que l'intersection dans $S \times T^*(M \times N)$

$$T^*_{f|_Z}(M \times N) \; . \; (S \times M \times T^*N)$$

est égale à l'intersection dans $T \times T^*(M \times N)$

$$T^*_{f|_Z}(M \times N) \; . \; (T \times M \times T^*N)$$

ce qui est clair.

(4.4) Produit bivariant

Etant donnés deux morphismes propres $X \overset{f}{\to} Y$ et $Y \overset{g}{\to} S$ induits par des projections lisses :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook] \arrow[d, "f"] \arrow[dd, bend right, "h"'] & S \times M \times N \arrow[d, "q"] \\ Y \arrow[r, hook] \arrow[d, "g"] & S \times N \arrow[dl] \\ S & \end{tikzcd}$$

on va définir un produit

$$Z(X \overset{f}{\to} Y) \times Z(Y \overset{g}{\to} S) \to Z(X \overset{h}{\to} S)$$

qui correspond au produit des fonctions constructibles.

Soit d'abord $Z \subset X$ irréductible. On suppose que $f|_Z \in Z(X \to Y)$ et que $h|_Z \in Z(X \to S)$

Soit $T = f(Z)$. On suppose aussi que $g|_T \in Z(Y \to S)$. On cherche à représenter l'espace $T^*_{f|_Z} M \times_T T^*_{g|_T} N$ pour un cycle $\Sigma\, n_i\, T^*_{h|_{Z_i}} (M \times N)$.

Il est plus simple dans un premier temps de "décomposer" l'espace $T^*_{f|_{Z_i}} (M \times N)$ en en un cycle de la forme $\Sigma\, n_i (T^*_{f|_{Z_i}} M \times_{T_i} T^*_{g|_{T_i}} N)$. Cette décomposition repose sur le résultat suivant.

(4.4.1) Lemme : Soit $Z \subset X$ irréductible, $T = f(Z)$. On suppose que $f|_Z$ et $h|_Z$ sont sans éclatement en codimension 0. Soit $\mathcal{C}(Z,N)$ le cône normal de $T^*_{h|_Z}(M \times N) \cap q^* T^* N$ dans $T^*_{h_Z}(M \times N)$, $\mathcal{C}_i$ une composante irréductible de $\mathcal{C}(Z,N)$, Z_i son image dans Z, et $T_i = f(Z_i)$. Alors

1) $g|_T$ est sans éclatement en codimension 0.

2) Pour tout i, $f|_{Z_i}$ est sans éclatement en codimension 0 .

3) $\mathcal{C}_i$ est la composante de dimension maximum de $T^*_{f|_Z} M \times_{T_i} T^*_{g|_{T_i}} N$.

4) Le morphisme $g|_{T_i} : T_i \to h(Z)$ est ouvert.

Preuve : elle est analogue à celle [S 1], prop.(3.3.). $\square$

Pour définir le produit bivariant, on utilisera le résultat suivant :

(4.4.2) <u>Lemme</u> : Soit $Z \subset X$ iréductible et $T = f(Z)$. on suppose que $f|_Z \in Z(X \to Y)$ et $g|_T \in Z(Y \to S)$. Il existe un unique cycle P de X vérifiant les propriétés suivantes :

1) $h|_P \in Z(X \to S)$

2) Au-dessus d'un ouvert dense $S°$ de S on a l'égalité

$$\mathcal{E}(P,N) = T^*_{f|_Z} M \times_T T^*_{g|_T} N .$$

De plus, $h|_P$ est l'unique cycle de $Z(X \to S)$ tel qu'on ait l'égalité

$$\check{Eu}_{h|_P} = \check{Eu}_{f|_Z} \cdot (\check{Eu}_{g|_T} \circ f) .$$

<u>Preuve</u> : D'après le lemme (4.4.1), il existe un ouvert de Zariski dense $S°$ de S au-dessus duquel on a les propriétés suivantes :

$h|_{Z°} \in Z(X° \to S°)$, $\mathcal{E}(Z,N)|_{S°} = \Sigma\, n_i\, \mathcal{E}_i|_{S°}$, $h|_{Z_i} \in Z(X° \to S°)$ et $g|_{T_i} \in Z(Y° \to$

Par suite, il existe un cycle P tel que au-dessus de $S°$ on ait

$\mathcal{E}(P,N)|_{S°} = T^*_{f|_Z} M \times_T T^*_{g|_T} N|_{S°}$. On le voit en effet par récurrence sur dim Z.

De plus $P|_{S°}$ définit un élément $h|_{P°} \in Z(X° \to S°)$. On peut supposer que $P = \overline{P|_S}$

On considère maintenant une modification propre $\pi : \tilde{S} \to S$ telle que si $\hat{Z}$ est le transformé strict de Z par π, le morphisme naturel $T^*_{\tilde{h}|_Z} (M \times N) \to \tilde{S}$ est plat. On suppose aussi que pour toute composante $\hat{P}_i$ de P, $T^*_{\tilde{h}|_{\hat{P}_i}} (M \times N) \to \tilde{S}$ est pl

On a maintenant, d'après le lemme (4.4.1) :

$$\mathcal{E}(\hat{P},N) = T^*_{\tilde{f}|_{\hat{Z}}} M \times_{\hat{T}} T^*_{\tilde{g}|_{\hat{T}}} N ,$$

puisque l'égalité a lieu génériquement sur $\tilde{S}$.

On va montrer l'égalité (*) $\check{Eu}_{\tilde{h}|_{\hat{P}}} = \check{Eu}_{\tilde{f}|_{\hat{Z}}} \cdot (\check{Eu}_{\tilde{g}|_{\hat{T}}} \circ \tilde{f})$.

Ceci prouvera que $\check{Eu}_{\tilde{h}|_{\hat{P}}}$ est une fonction constructible qui provient d'une fonction sur X. Par suite, d'après la définition (2.2.2), $h|_P \in Z(X \to S)$, et on aura aussi

$$\check{Eu}_{h|_P} = \check{Eu}_{f|_Z} \cdot (\check{Eu}_{g|_T} \circ f)$$

puisque c'est la même égalité que la précédente.

La preuve de (*) se fait en comparant différentes classes de cônes normaux et en utilisant des arguments analogues à ceux développés dans [S 1] .

On considère en effet les 4 sous-variétés suivantes de $\tilde{S} \times T^*(M \times N)$:

$\{\tilde{s}\} \times T^*(M \times N)$, $\tilde{S} \times T^*_x(M \times N)$, $S \times M \times T^*N$, $S \times T^*_x M \times T^*N$, pour $x \in \hat{Z}$, et $\tilde{s} = \tilde{h}(x)$, et les cônes normaux itérés de $T^*_{\tilde{h}|_{\hat{P}}}(M \times N)$ le long de ces sous-variétés.

(4.4.3) <u>Produit bivariant de deux cycles relatifs</u>

Soit $f|_Z \in Z(X \to Y)$ et $g|_T \in Z(Y \to S)$.

On peut d'abord par un changement de base $\pi: \tilde{S} \to S$ se ramener au cas où $h|_Z \in Z(X \to S)$ et pour toute composante T_i de T, $g|_{T_i} \in Z(Y \to S)$.

On peut d'abord par un changement de base $\pi : \tilde{S} \to S$ se ramener au cas où $h_{|Z} \in Z(X \to S)$ et pour toute composante T_i de T, $g_{|T_i} \in Z(Y \to S)$.

On peut donc supposer T irréductible.

On considère l'inclusion $i_T : T \to Y$. On remplace alors $f|_Z$ par $i_T^*(f|_Z)$.

On peut donc supposer que pour toute composante Z_i de Z on a $f(Z_i) = T$.

On suppose d'abord que Z est un cycle positif. Il existe un unique cycle $h|_P$ satisfaisant les propriétés du lemme (4.4.2). Ce cycle existe avant tous les changements de base faits. C'est le produit bivariant de $f|_Z$ et $g|_T$.

Quand Z n'est pas positif, on considère un changement de base $\tilde{T} \to T$ comme dans la définition (2.2.2), puis un changement de base $\pi : \tilde{S}' \to S$ tel que le transformé strict $\tilde{T}' \xrightarrow[\tilde{g}']{} S'$ définisse un élément de $Z(\tilde{Y}' \to \tilde{S}')$.

On peut donc définir le produit $\tilde{f}|_{\tilde{Z}'}$ par $\tilde{g}|_{\tilde{T}'}$. Il coïncide avec le produit attendu sur un ouvert de Zariski dense de $\tilde{T}'$. On peut alors continuer par récurrence sur dim T .

(4.5) Classes de Chern-Mather

Une classe de Chern-Mather est une transformation naturelle de la théorie bivariante Z dans l'homologie bivariante, qui étend la classe de Chern-Mather dans le cas où S est un point. L'existence d'une telle classe se ramène à celle d'une classe fondamentale relative pour $T^*_{f|_Z}(M)$ si $f|_Z \in Z(S\times M \to S)$ (voir par exemple [S 1], lemme (1.2.1)).

Question : Soit $f|_Z \in Z(S \times M \to S)$. Existe-t-il une classe fondamentale relative $[T^*_{f|_Z} M \to S] \in H_{2\dim H}(T^*M \to S, \mathbb{Z})$?

BIBLIOGRAPHIE

[B 1] D. Barlet : Espace analytique réduit des cycles ... Séminaire Norguet. Lecture Notes n° 482 p. 1-158.

[B 2] D. Barlet : Familles analytiques de cycles et classes fondamentales relatives. Lecture Notes n° 807 p. 1-24.

[Br] J-P. Brasselet : Classes de Chern en théorie bivariante. Proc. conference Analyse et topologie sur les espaces singuliers. Luminy 1981. Astérisque n° 101-102.

[Br-S] J-P. Brasselet, M-H. Schwarz : Sur les classes de Chern d'un ensemble analytique complexe. Astérisque 82-83.

[D] P. Deligne : Le formalisme des cycles évanescents. Exp. n° XIV, S.G.A. VII.2, Lecture Notes in Math., n° 340.

[Fi] Fischer : Complex analytic Geometry. Springer Lecture Notes n° 533

[Fu] W. Fulton : Intersection theory. Springer-Verlag.

[F-M] W. Fulton, R. Mac Pherson : Categorical frame work for the study of singular spaces. Mem. Amer. Math. Soc., 243 (1981).

[G-V] G. Gonzalez, J-L. Verdier : L'obstruction locale d'Euler. Astérisque n° 8

[H 1] H. Hironaka : Flattening theorem in complex analytic geometry. Amer. J. of Math. Vol. 97 n° 2 (1975).

[H 2] H. Hironaka : Stratifications and flatness. Real and complex singularitie Oslo 1976. P. Holm Ed. Sijthoff and Noordhoff.

[H-M-S] J-P. Henry, M. Merle, C. Sabbah : Sur la condition de Thom stricte pour un espace analytique complexe. Annales de l'E.N.S. (1984).

[M] R. Mac Pherson : Chern classes of singular varieries. Ann. of Math., 100 (1974).

[S 1] C. Sabbah : Quelques remarques sur la géométrie des espaces conormaux A paraître dans Astérisque.

[S 2] C. Sabbah : Morphismes analytiques stratifiés sans éclatement et cycles évanescents. Astérisque n° 101-102.

[T] B. Teissier : Variétés polaires II. Conf. de La Rabida 1984. Lecture Notes in Math. n° 961.

[V 1] J-L. Verdier : Classe d'homologie associée à un cycle. Astérisque n° 36-37.

[V 2] J-L. Verdier : Spécialisation des classes de Chern. Astérisque n° 82-83.

*

* *

*