Systèmes holonomes d'équations aux q-différences

Claude Sabbah

Résumé. Nous développons la théorie des systèmes holonomes d'équations aux q-différences de manière analogue à celle des modules holonomes sur l'algèbre de Weyl. Nous pouvons ainsi répondre à des questions posées par K. Aomoto [2, 3] concernant les systèmes hypergéométriques aux q-différences.

Abstract. We develop the theory of holonomic systems of q-difference equations in a way similar to the theory of holonomic modules over the Weyl algebra. We are then able to give answers to some questions raised by K. Aomoto [2, 3] concerning hypergeometric systems of q-difference equations.

1980 Mathematics Subject Classification (1985 Revision) : 33D60, 32C38, 39A10.

Introduction

Dans la suite, k désigne un corps de caractéristique 0.

Dans [1], K. Aomoto a introduit la notion suivante de système holonome aux q-différences, que nous appellerons dans la suite *système rationnel holonome d'équations aux q-différences* : un espace vectoriel de dimension finie (disons r) sur le corps $k(x)$ des fractions rationnelles à n variables $x = (x_1, \dots, x_n)$ muni de plus d'une action inversible d'opérateurs k-linéaires $\tau_1, \dots, \tau_n$ qui commutent et vérifient les relations de commutation suivantes avec les variables x_i :

$$(*) \qquad \tau_j \cdot x_i = q^{\delta_{i,j}} x_i \cdot \tau_j \qquad \forall i, j = 1, \dots, n.$$

Si on se donne une base $\boldsymbol{m}$ de cet espace vectoriel, la donnée des τ_j est équivalente à la donnée de matrices $A_j \in \mathrm{GL}(r, k(x))$ $(j = 1, \dots, n)$ sujettes aux relations

$$A_i(q^{\mathbf{1}_j} x) \cdot A_j(x) = A_j(q^{\mathbf{1}_i} x) \cdot A_i(x)$$

où l'on a posé

$$(q^{\mathbf{1}_j}x)_\ell = \begin{cases} x_\ell & \text{si } \ell \neq j \\ qx_j & \text{si } \ell = j. \end{cases}$$

Deux systèmes sont équivalents si l'on passe de l'un à l'autre par un changement de base $B \in \mathrm{GL}(r, k(x))$, c'est à dire si l'on a pour tout $j = 1, \ldots, n$:

$$A'_j(x) = B(q^{\mathbf{1}_j}x) \cdot A_j(x) \cdot B(x)^{-1}.$$

Dans [2, 3] K. Aomoto pose un certain nombre de questions concernant les *systèmes q-hypergéométriques*, c'est à dire ceux pour lesquels l'espace vectoriel est de dimension 1 sur $k(x)$. Nous nous proposons de répondre ici à certaines de ces questions (§3.2.7). Pour cela, nous remarquons que l'algèbre des opérateurs aux q-différences sur $k[x, x^{-1}]$, à savoir l'algèbre engendrée par $k[x, x^{-1}]$ et $k[\tau, \tau^{-1}]$ avec les relations $(*)$, satisfait des propriétés analogues à celles de l'algèbre de Weyl, notamment l'inégalité de Bernstein : tout module à gauche de type fini est de dimension $\geq n$. La théorie de Bernstein [4] a un analogue pour l'algèbre des opérateurs aux q-différences : théorèmes de finitude pour l'image directe et l'image inverse, localisation, polynôme de Bernstein. Le cas des modules q-hypergéométriques est analogue à ce qui est fait dans [10] pour les $\mathcal{D}$-modules hypergéométriques. Le lien entre systèmes rationnels holonomes aux q-différences et modules holonomes est donné par le théorème 2.7.1, analogue d'un théorème de Kashiwara pour les $\mathcal{D}$-modules.

L'idée de traiter l'algèbre des opérateurs aux q-différences sur le tore de manière analogue à l'algèbre de Weyl est apparue au cours de discussions avec C. Kassel, ainsi qu'avec F. Loeser.

1 L'algèbre des opérateurs aux q-différences

Soit $q \in k^*$. L'algèbre des opérateurs aux q-différences sur l'espace affine $\mathbf{A}^n_k$ est le quotient de l'algèbre libre engendrée par $k[x_1, \ldots, x_n]$ et $k[\tau_1, \ldots, \tau_n]$ par les relations $(*)$ de l'introduction. Pour q fixé, cette algèbre sera notée $k[x]\langle\tau\rangle$. De manière analogue, l'algèbre des opérateurs aux q-différences sur le tore $T^n = (k^*)^n$ est le quotient de l'algèbre libre engendrée par $k[x, x^{-1}]$ et $k[\tau, \tau^{-1}]$ par les relations $(*)$ (nous notons $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_n)$). Cette algèbre est aussi notée ${}_q\mathcal{E}(T^n)$. Tout élément de $k[x]\langle\tau\rangle$ (*resp.* ${}_q\mathcal{E}(T^n)$) s'écrit de manière unique sous la forme

$$P(x, \tau) = \sum_{\alpha, \beta \in \mathbf{N}^n} a_{\alpha,\beta} x^\alpha \tau^\beta \qquad (\textit{resp. } \alpha, \beta \in \mathbf{Z}^n)$$

avec $a_{\alpha,\beta} \in k$.

1.1 Division dans $k[x]\langle\tau\rangle$

Le procédé de division dans l'anneau des polynômes $k[x, \tau]$ (*i.e.* lorsque $q = 1$) s'étend sans problème pour $q \neq 1$. Nous allons indiquer les énoncés utiles. Donnons-nous un bon ordre sur $\mathbf{N}^{2n}$ compatible avec la structure de monoïde (par exemple l'ordre lexicographique). Tout élément P de $k[x]\langle\tau\rangle$ écrit comme ci-dessus admet un exposant privilégié relativement à cet ordre :

$$\operatorname{Exp}(P) = \max\left\{(\alpha,\beta)\,\middle|\,a_{\alpha,\beta} \neq 0\right\} \in \mathbf{N}^{2n}.$$

Si I est un idéal à gauche de $k[x]\langle\tau\rangle$, on note $\operatorname{Exp}(I)$ l'ensemble des $\operatorname{Exp}(P)$ pour $P \in I$. C'est un ensemble stable par l'addition de $\mathbf{N}^{2n}$ et il définit donc un escalier de $\mathbf{N}^{2n}$. Soient $P_1, \ldots, P_r \in I$ dont les exposants correspondent aux sommets de l'escalier. Ils définissent une partition naturelle $\operatorname{Exp}(I) = \bigsqcup_{i=1}^{r} E_i$ et on a, de manière analogue au cas commutatif, un énoncé de division à gauche (et de manière similaire à droite) :

Proposition 1.1.1 *Soit $P \in k[x]\langle\tau\rangle$. Il existe une unique famille $(Q_1, \ldots, Q_r; R)$ d'éléments de $k[x]\langle\tau\rangle$ telle que*

1. $P = \sum Q_i P_i + R$,
2. *pour tout $i = 1, \ldots, n$, on a $\operatorname{Exp}(Q_i) \in E_i$,*
3. *aucun exposant d'un monôme de R n'est dans $\operatorname{Exp}(I)$.*

De plus, on a $P \in I$ si et seulement si $R = 0$. □

Corollaire 1.1.2 *Les anneaux $k[x]\langle\tau\rangle$ et $_q\mathcal{E}(T^n)$ sont noethériens à gauche et à droite.*

Démonstration. Tout idéal à gauche (ou à droite) I de $k[x]\langle\tau\rangle$ est engendré par une base de division $P_1, \ldots, P_r$, donc est de type fini. De même, si I est un idéal de $_q\mathcal{E}(T^n)$, alors I est engendré par $I \cap k[x]\langle\tau\rangle$, donc est de type fini. □

1.2 Simplicité

Dans la suite, nous nous intéresserons plutôt à l'algèbre $_q\mathcal{E}(T^n)$ qui possède des propriétés analogues à celles de l'algèbre de Weyl, alors que $k[x]\langle\tau\rangle$ ne les possède pas. Voici un premier exemple.

Proposition 1.2.1

1. *L'anneau $k[x]\langle\tau\rangle$ n'est pas simple (*i.e. *possède des idéaux bilatères propres).*
2. *Si q n'est pas racine de l'unité, l'anneau $_q\mathcal{E}(T^n)$ est simple.*

Démonstration. Pour le premier point, on remarque que pour tout $i = 1, \ldots, n$, l'idéal à gauche de $k[x]\langle\tau\rangle$ engendré par x_i (ou τ_i) est aussi un idéal à droite. Considérons donc le deuxième point. Soit I un idéal bilatère non nul. Si $P \neq 0$ est dans I, on peut supposer que P est dans $k[x]\langle\tau\rangle$ et il existe une variable, par exemple τ_1, pour laquelle on peut écrire

$$P = \sum_{j=0}^{d_1} A_j(x, \tau')\tau_1^j$$

avec $\tau' = (\tau_2, \ldots, \tau_n)$, $d_1 > 0$ et $A_{d_1} \neq 0$. Montrons que I contient un élément indépendant de τ_1. Si $A_j = 0$ pour tout $j < d_1$, alors $A_{d_1} \in I$. Sinon, soit

$$Q = P \cdot x_1 - q^{d_1} x_1 \cdot P \in I.$$

Alors $Q = x_1 \cdot R$ avec $R \neq 0$ car q n'est pas racine de l'unité et $\deg_{\tau_1} R < d_1$. En continuant le procédé, on en déduit que I contient une constante non nulle. $\square$

1.3 Transformations canoniques

L'algèbre ${}_q\mathcal{E}(T^n)$ possède quelque ressemblance avec l'algèbre des opérateurs micro-différentiels. On peut effectuer des changements de variables qui mélangent x et τ. Dans la suite, nous noterons ${}_q\mathcal{E} = {}_q\mathcal{E}(T^n)$.

Lemme 1.3.1 *Posons pour tout $j = 1, \ldots, n$*

$$\begin{aligned} x'_j &= x_1^{a_{1j}} \cdots x_n^{a_{nj}} \cdot \tau_1^{b_{1j}} \cdots \tau_n^{b_{nj}} \\ \tau'_j &= x_1^{c_{1j}} \cdots x_n^{c_{nj}} \cdot \tau_1^{d_{1j}} \cdots \tau_n^{d_{nj}} \end{aligned}$$

où les exposants a, b, c, d sont dans $\mathbf{Z}$. Alors on a les relations $(*)$ pour (x', τ') si (et seulement si lorsque q n'est pas racine de l'unité) la matrice

$$\begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix}$$

avec $A = (a_{ij}), \ldots$ est symplectique, c'est à dire vérifie

$$\begin{pmatrix} {}^tA & {}^tB \\ {}^tC & {}^tD \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{Id} \\ -\mathrm{Id} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{Id} \\ -\mathrm{Id} & 0 \end{pmatrix}.$$

Démonstration. Les relations $\tau'_j \cdot x'_\ell = q^{\delta_{j\ell}} x'_\ell \cdot \tau'_j$ se traduisent par ${}^tAD - {}^tBC = \mathrm{Id}$ et les relations de commutation $x'_j \cdot x'_\ell = x'_\ell \cdot x'_j$ (*resp.* $\tau'_j \cdot \tau'_\ell = \tau'_\ell \cdot \tau'_j$) par les relations ${}^tAB = {}^tBA$ (*resp.* ${}^tCD = {}^tDC$). $\square$

On obtient ainsi un morphisme de l'algèbre ${}_q\mathcal{E}$ dans elle-même, noté σ_E, si E désigne la matrice formée par A, B, C, D, donné par $\sigma_E(x_j) = x'_j$ et $\sigma_E(\tau_j) = \tau'_j$. Soient E et E' des matrices symplectiques, et posons $E'' = E' \cdot E$, $\sigma_{E''}(x_j) = x''_j$ et $\sigma_{E''}(\tau_j) = \tau''_j$. Il existe alors des entiers m_j et p_j tels que l'on ait

$$\sigma_{E'}(x'_j) = q^{m_j} x''_j \qquad \text{et} \qquad \sigma_{E'}(\tau'_j) = q^{p_j} \tau''_j.$$

En particulier, σ_E est un automorphisme de ${}_q\mathcal{E}$.

Exemples.

1. Un changement torique de coordonnées en x, donné par une matrice $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbf{Z})$ induit la transformation canonique de matrice
$$E = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & {}^t A^{-1} \end{pmatrix}.$$

2. La transformation de Mellin (transformation de Fourier sur le tore) est donnée par la matrice
$$E = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{Id} \\ -\mathrm{Id} & 0 \end{pmatrix}$$
c'est à dire $x'_j = \tau_j^{-1}$ et $\tau'_j = x_j$. Si M est un ${}_q\mathcal{E}(T^n)$-module, nous noterons $\mathfrak{M}(M)$ (ou encore $\mathfrak{M}$ si aucune confusion n'est à craindre) le transformé de Mellin de M.

Lemme 1.3.2 *Soit $v = (a_{11}, \ldots, a_{n1}, b_{11}, \ldots, b_{n1})$ un vecteur primitif non nul. Il existe alors une matrice symplectique entière de première colonne égale à v.* □

Définition 1.3.3 *On appelle coordonnée de ${}_q\mathcal{E}$ un monôme $x_1^{a_{11}} \cdots x_n^{a_{n1}} \tau_1^{b_{11}} \cdots \tau_n^{b_{n1}}$ dont l'exposant est un vecteur primitif de $\mathbf{Z}^{2n}$.*

Toute coordonnée fait donc partie d'un système de coordonnées (x', τ') obtenu à partir de (x, τ) par une transformation canonique.

1.4 ${}_q\mathcal{E}$-modules de type fini à q-support dans un sous-tore de codimension 1

Soit M un ${}_q\mathcal{E}$-module de type fini et soit $a \in k$. Nous dirons que M *est à q-support dans $x_1 - a = 0$* si tout élément $m \in M$ est annulé par un produit

$$\prod_{j \in \mathbf{Z}} (x_1 - q^j a)^{\gamma_j}$$

où $\gamma_j \in \mathbf{N}$ est nul sauf pour un nombre fini de j. Les résultats qui suivent s'appliquent, par transformation canonique, lorsqu'on remplace x_1 par une coordonnée x'_1 de ${}_q\mathcal{E}$. Notons maintenant $x' = (x_2, \ldots, x_n)$ et $\tau' = (\tau_2, \ldots, \tau_n)$, et soit ${}_q\mathcal{E}' = {}_q\mathcal{E}(T^{n-1})$ l'algèbre correspondante.

Proposition 1.4.1 *Soit M un ${}_q\mathcal{E}$-module de type fini à q-support dans $x_1 - a = 0$. Il existe un ${}_q\mathcal{E}'$-sous-module de type fini M_0 de M, stable par x_1, tel que l'on ait un isomorphisme de ${}_q\mathcal{E}'$-modules*

$$M \simeq k[\tau_1, \tau_1^{-1}] \otimes_k M_0.$$

De plus, si on munit le terme de droite de l'action de τ_1 provenant de celle de $k[\tau_1, \tau_1^{-1}]$ et de l'action de x_1 provenant de celle sur M_0, cet isomorphisme est ${}_q\mathcal{E}$-linéaire. Enfin, il existe p tel que $(x_1 - a)^p \cdot M_0 = 0$.

Démonstration. On peut écrire $M = \oplus_{\ell\in\mathbf{Z}} M_\ell$ avec $M_\ell = \bigcup_{p\in\mathbf{N}} \operatorname{Ker}(x_1 - q^\ell a)^p$ et τ_1 induit un isomorphisme $M_\ell \xrightarrow{\sim} M_{\ell-1}$. D'où un isomorphisme de ${}_q\mathcal{E}'$-modules comme dans la proposition, compatible avec l'action de τ_1. En munissant le terme de droite de l'action de x_1 obtenue à partir de celle sur M_0 en imposant la relation $\tau_1 x_1 = q x_1 \tau_1$, on voit que cet isomorphisme est ${}_q\mathcal{E}$-linéaire. Par définition, pour tout $m \in M_0$, il existe p tel que $(x_1 - a)^p \cdot m = 0$. Il existe une famille finie de générateurs de M sur ${}_q\mathcal{E}$, qu'on peut supposer gradués relativement à cette graduation de M, et en fait de degré 0, c'est à dire dans M_0. En particulier ils engendrent M_0 sur ${}_q\mathcal{E}'[x_1]$. On en déduit l'existence de p tel que $(x_1 - a)^p \cdot M_0 = 0$ et par suite M_0 est de type fini sur ${}_q\mathcal{E}'$. □

1.5 Dimension des modules sur l'algèbre $k[x]\langle\tau\rangle$

Nous allons indiquer dans cette section les adaptations qu'il faut faire subir aux démonstrations données par exemple dans [5] et [7] concernant la dimension des modules sur l'algèbre de Weyl, pour obtenir les énoncés analogues sur l'algèbre des opérateurs aux q-différences. On ne dispose pas pour cette algèbre d'un gradué commutatif et par suite les démonstrations ne peuvent pas s'appuyer sur la théorie de la dimension en algèbre commutative. Par contre la version de cette dernière pour l'anneau des polynômes utilisant la théorie des bases standards s'étend au cas q-commutatif. Pour les besoins de la récurrence, nous travaillerons d'abord avec l'algèbre des opérateurs aux q-différences à coefficients dans l'anneau $A = k[y_1, \ldots, y_p]$, encore notée $k[y, x]\langle\tau\rangle$.

1.5.1 Filtration de Bernstein. Notons $Tk[y, x]\langle\tau\rangle$ la filtration (croissante) par le degré total en y, x, τ. Si N est un $k[y, x]\langle\tau\rangle$-module de type fini, on a la notion de filtration de N bonne pour $Tk[y, x]\langle\tau\rangle$: si TN une filtration de N, on note $\mathcal{R}_T N$ le module de Rees associé, c'est à dire

$$\mathcal{R}_T N \overset{\text{déf}}{=} \oplus_{j\in\mathbf{Z}} T_j N \cdot u^j \subset N[u, u^{-1}]$$

où u est une nouvelle variable ; on dit que TN est bonne pour $Tk[y, x]\langle\tau\rangle$ si $\mathcal{R}_T N$ est un $\mathcal{R}_T k[y, x]\langle\tau\rangle$-module de type fini. Soit TN une telle filtration. Alors pour tout $j \in \mathbf{Z}$ l'espace vectoriel $T_j N$ est de dimension finie sur k. En utilisant l'énoncé de division 1.1.1 avec un exposant privilégié défini à l'aide de la filtration TN, la contemplation de l'escalier associé à un module permet d'obtenir, comme dans le cas commutatif :

Proposition 1.5.2 *Il existe une entier* $d = d(N) \geq 0$ *et un entier* $e = e(N) > 0$ *tels que pour toute bonne filtration* TN *il existe un polynôme d'une variable* $\chi_{(N,TN)}(t)$ *de terme dominant* $(e(N)/d!)t^{d(N)}$ *avec*

$$\forall\, j \gg 0 \qquad \dim T_j N = \chi_{(N,TN)}(j). \quad \square$$

Nous allons maintenant identifier $d(N)$ à la dimension homologique de N. Rappelons qu'on définit la codimension homologique $c(N)$ par

$$c(N) = \min\left\{ j \in \mathbf{N} \,\middle|\, \mathcal{E}xt^j_{k[y,x]\langle\tau\rangle}(N, k[y,x]\langle\tau\rangle) \neq 0 \right\}.$$

Théorème 1.5.3

1. *L'algèbre* $k[y,x]\langle\tau\rangle$ *est de dimension homologique globale finie.*
2. *Soit* N *un* $k[y,x]\langle\tau\rangle$*-module à gauche de type fini. On a alors*

$$c(N) + d(N) = 2n + p.$$

Démonstration. Nous allons procéder comme dans [5, Chap. 2 §7]. Il suffit de montrer les lemmes suivants :

Lemme 1.5.4 *Pour* N *de type fini sur* $k[y,x]\langle\tau\rangle$ *on a pour tout* $j \in \mathbf{N}$

$$d\left(\mathcal{E}xt^j_{k[y,x]\langle\tau\rangle}(N, k[y,x]\langle\tau\rangle)\right) \leq (2n+p) - j.$$

Lemme 1.5.5 $\mathcal{E}xt^j_{k[y,x]\langle\tau\rangle}(N, k[y,x]\langle\tau\rangle) = \{0\}$ *si* $j < (2n+p) - d(N)$.

Lemme 1.5.6 *Pour tout* $k[y,x]\langle\tau\rangle$ *module à gauche* N *(*resp. *à droite* $\widetilde{N}$*) de type fini, on a*

$$\mathrm{Tor}_j^{k[y,x]\langle\tau\rangle}(\widetilde{N}, N) = \{0\} \qquad si\ j > 2n+p.$$

Remarquons d'abord que si

$$0 \longrightarrow N' \longrightarrow N \longrightarrow N'' \longrightarrow 0$$

est une suite exacte et si les trois énoncés sont vrais pour N' et N'', ils le sont pour N (et même chose avec $\widetilde{N}$ pour le troisième). Commençons par prouver les deux premiers lemmes. L'argument de suite spectrale donné dans [7, §2.3] permet de remplacer N par un gradué relativement à une filtration bonne pour la filtration de $k[y,x]\langle\tau\rangle$ par le degré en une des variables (on vérifie que pour une telle filtration on a $d(N) = d(\mathrm{gr}N)$). Si on applique ceci successivement aux filtrations par le degré en l'une des variables et si $N = k[y,x]\langle\tau\rangle/I$ où I est un idéal à gauche de $k[y,x]\langle\tau\rangle$ (cas auquel on se ramène par extensions successives), on voit qu'on peut supposer que I

est multi-gradué relativement à la multi-graduation par le degré en chaque variable, autrement dit on peut supposer que I est un idéal engendré par des monômes. Alors si $I = \{0\}$ on a $N = k[y, x]\langle\tau\rangle$ et les deux lemmes sont satisfaits pour N. Si $I \neq \{0\}$, N est de torsion et par suite est extension successive de modules annulés par une puissance d'une des variables y, x, τ. Par extension encore on peut supposer que cette puissance est 1. Le résultat s'obtient alors immédiatement par récurrence sur le nombre de variables (par exemple, si x_1 agit par 0 sur N, c'est que N est de type fini sur l'anneau $k[y, \tau_1][x']\langle\tau'\rangle$ avec $x' = (x_2, \ldots, x_n)$, $\tau' = (\tau_2, \ldots, \tau_n)$). La preuve du troisième lemme repose sur le même argument appliqué au module à droite $\widetilde{N}$. $\square$

2 $_q\mathcal{E}$-modules holonomes

Dans cette section nous adaptons les résultats concernant les modules holonomes sur l'algèbre de Weyl ([4], *voir* aussi [5, 7]) au cas des modules sur l'algèbre $_q\mathcal{E}(T^n)$. Nous supposerons dans la suite que *$q \in k$ n'est pas racine de l'unité* et nous noterons $_q\mathcal{E} = {_q\mathcal{E}}(T^n)$.

2.1 Inégalité de Bernstein

Nous dirons qu'un $k[x]\langle\tau\rangle$-module N est *sans torsion monomiale* si aucun de ses éléments non nuls n'est annulé par un monôme en x, τ. Cela revient à dire que l'application naturelle $N \to {_q\mathcal{E}}(T^n) \otimes_{k[x]\langle\tau\rangle} N$ est injective.

Théorème 2.1.1 *Soit N un $k[x]\langle\tau\rangle$-module à gauche de type fini non nul et sans torsion monomiale. Alors $d(N) \geq n$.*

Démonstration. Nous adaptons celle donnée dans [7]. Soit TN une bonne filtration de N telle que $T_0 N \neq 0$. On montre par récurrence que pour tout j, l'application

$$\begin{array}{ccc} T_j(k[x]\langle\tau\rangle) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(T_j N, T_{2j} N) \\ a & \longmapsto & [m \mapsto am] \end{array}$$

est injective. On en déduit alors que $\chi_{(N,TN)}(j) \cdot \chi_{(N,TN)}(2j) \geq \chi_{k[x]\langle\tau\rangle}(j)$, d'où le théorème. L'assertion est claire pour $j = 0$. On la suppose montrée jusqu'au rang $\ell - 1$. Si elle n'est pas vérifiée au rang ℓ, c'est qu'il existe $a \in T_\ell(k[x]\langle\tau\rangle)$ tel que $a \cdot T_\ell N = 0$. Il existe alors une variable, par exemple τ_1, telle qu'on puisse écrire

$$a = \sum_{j=0}^{d_1} \tau_1^j \cdot a_j(x, \tau')$$

avec a_{d_1} non identiquement nul et $d_1 > 0$. Si $a_j = 0$ pour tout $j \neq d_1$, on en déduit que $a_{d_1}(x, \tau') \cdot T_\ell N = 0$ et en particulier $a_{d_1}(x, \tau') \cdot T_{\ell - d_1} N = 0$, d'où $a_{d_1} = 0$, ce qui est contradictoire avec l'hypothèse faite. Il existe donc $j \neq d_1$ avec $a_j \neq 0$. On a alors

$$a \cdot x_1 - q^{d_1} x_1 \cdot a = x_1 \cdot b$$

avec $b \neq 0$ et $b \in T_{\ell-1}(k[x]\langle\tau\rangle)$. On en déduit que $(x_1 b) \cdot T_{\ell-1} N = 0$ donc $b \cdot T_{\ell-1} N = 0$, ce qui est contradictoire avec l'hypothèse de récurrence. □

Soit M un ${}_q\mathcal{E}(T^n)$-module à gauche de type fini. Nous définissons la codimension homologique $c(M)$ comme pour les modules sur $k[x]\langle\tau\rangle$ et la dimension par l'égalité $d(M) = 2n - c(M)$.

Corollaire 2.1.2 *Pour M non nul comme ci-dessus on a $d(M) \geq n$.*

Démonstration. Soit $N \subset M$ un sous-$k[x]\langle\tau\rangle$-module de type fini tel que l'on ait $M = {}_q\mathcal{E}(T^n) \otimes_{k[x]\langle\tau\rangle} N$. Si $j > n$ on a $d(\mathcal{E}xt^j_{k[x]\langle\tau\rangle}(N, k[x]\langle\tau\rangle)) < n$ donc ce module est de torsion monomiale. Puisque la tensorisation par ${}_q\mathcal{E}(T^n)$ est exacte, on en déduit que $\mathcal{E}xt^j_{{}_q\mathcal{E}}(M, {}_q\mathcal{E}) = \{0\}$ pour $j > n$, d'où l'assertion. □

Définition 2.1.3 *Soit M un ${}_q\mathcal{E}(T^n)$-module à gauche de type fini. Nous dirons que M est holonome si $M = \{0\}$ ou si $d(M) = n$.*

Corollaire 2.1.4 *Le ${}_q\mathcal{E}$-module M est holonome si et seulement si $\mathcal{E}xt^j_{{}_q\mathcal{E}}(M, {}_q\mathcal{E})$ est nul pour $j \neq n$, et dans ces conditions $\mathcal{E}xt^n_{{}_q\mathcal{E}}(M, {}_q\mathcal{E})$ est un ${}_q\mathcal{E}$-module holonome.* □

Corollaire 2.1.5 *Le ${}_q\mathcal{E}$-module M est holonome si et seulement si il existe un sous-$k[x]\langle\tau\rangle$-module N tel que $M = {}_q\mathcal{E}(T^n) \otimes_{k[x]\langle\tau\rangle} N$ et $d(N) \leq n$.*

Démonstration. Si il existe un tel N, on en déduit que $\mathcal{E}xt^j_{{}_q\mathcal{E}}(M, {}_q\mathcal{E}) = \{0\}$ pour $j < n$ par platitude. Inversement, si $d(M) \leq n$, on peut appliquer la construction de [8] (*voir* aussi [5, Chap. 2 §7]) : on choisit un sous-$k[x]\langle\tau\rangle$-module $N' \subset M$ qui engendre M. Il existe un plus grand sous-module N de dimension $\leq n$. Pour montrer que N engendre M, on remarque que la construction de N est compatible au changement de base plat. Par suite ${}_q\mathcal{E}(T^n) \otimes_{k[x]\langle\tau\rangle} N$ est le plus grand sous-${}_q\mathcal{E}$-module de M de dimension $\leq n$, donc est égal à M. □

Corollaire 2.1.6 *Tout ${}_q\mathcal{E}$-module holonome est de longueur finie (donc cyclique d'après un théorème de Stafford et* 1.2.1*) et tout sous-quotient d'un module holonome est encore holonome. Enfin, toute extension de modules holonomes l'est aussi.* □

Corollaire 2.1.7 *Soit (N, TN) un $k[x]\langle\tau\rangle$-module filtré. Supposons que pour tout j assez grand on ait*

$$\dim T_j N \leq \frac{c}{n!} j^n + c_1 (j+1)^{n-1}.$$

Alors $M \overset{\text{déf}}{=} {}_q\mathcal{E}(T^n) \otimes_{k[x]\langle\tau\rangle} N$ est un ${}_q\mathcal{E}$-module holonome.

Démonstration (*voir* [7]). Soit $\mathcal{R}_T N_0$ un sous-$\mathcal{R}_T(k[x]\langle\tau\rangle)$-module gradué de type fini de $\mathcal{R}_T N$. Alors, du fait de l'inégalité satisfaite par TN (donc par TN_0, qui est une bonne filtration de N_0 par hypothèse), le module N_0 est de dimension n et de multiplicité $\leq c$ ou bien de dimension $< n$. Toute suite croissante de tels sous-modules est donc stationnaire après tensorisation par ${}_q\mathcal{E}(T^n)$ et par suite M est holonome. Notons aussi que la filtration induite par TN sur le quotient de N par sa torsion monomiale est bonne. □

Remarque. Soit M un ${}_q\mathcal{E}$-module de type fini à q-support dans $x_1 - a = 0$. Nous avons vu qu'alors $M \simeq k[\tau_1, \tau_1^{-1}] \otimes_k M_0$ avec M_0 de type fini sur ${}_q\mathcal{E}(T^{n-1})$. On vérifie (en considérant un sous-module N) que $d(M) = d(M_0) + 1$ et donc M est holonome si et seulement si M_0 l'est.

2.2 q-localisation hors d'un sous-tore de codimension 1

Comme plus haut, nous nous restreindrons au cas du sous-tore T^{n-1} d'équation $x_1 = 1$, les autres cas s'obtenant de manière analogue après une transformation canonique convenable. Soit M un ${}_q\mathcal{E}$-module holonome. Notons $j : T^n - T^{n-1} \hookrightarrow T^n$ l'inclusion. Nous définissons

$$ {}_qj_*j^*M \overset{\text{déf}}{=} k[x, x^{-1}]_{(T^{n-1})_q} \otimes_{k[x,x^{-1}]} M $$

où $k[x, x^{-1}]_{(T^{n-1})_q}$ désigne le localisé de l'anneau $k[x, x^{-1}]$ en la partie multiplicative engendrée par les polynômes $(x_1 - q^j)$ pour $j \in \mathbf{Z}$. Alors ${}_qj_*j^*M$ est naturellement muni d'une structure de ${}_q\mathcal{E}$-module à gauche : on pose

$$\begin{array}{rcll} x_j \cdot [P(x_1)^{-1} \otimes m] & = & P(x_1)^{-1} \otimes x_j m & \text{pour tout } j \\ \tau_j \cdot [P(x_1)^{-1} \otimes m] & = & P(x_1)^{-1} \otimes \tau_j m & \text{pour } j \neq 1 \\ \tau_1 \cdot [P(x_1)^{-1} \otimes m] & = & P(qx_1)^{-1} \otimes \tau_1 m & \end{array}$$

On a un morphisme naturel

$$ M \xrightarrow{\varphi} {}_qj_*j^*M $$

dont le noyau est le plus grand sous-module de M à q-support contenu dans T^{n-1}. Le noyau et l'image de ce morphisme sont holonomes si M l'est, mais il n'est pas vrai que ${}_qj_*j^*M$ soit de type fini sur ${}_q\mathcal{E}$. Nous allons voir que ce module est limite inductive de sous-modules holonomes. Posons pour tout $p \geq 1$

$$ {}_qj_+^{(p)}j^*M \overset{\text{déf}}{=} \left\{ m \in {}_qj_*j^*M \,\middle|\, \exists \ell \in \mathbf{N}, \left[\prod_{j=-\ell}^{\ell} (x_1 - q^j) \right]^p \cdot m \in \varphi(M) \right\}. $$

Il est immédiat de vérifier que ${}_qj_+^{(p)}j^*M$ est un sous-${}_q\mathcal{E}$-module de ${}_qj_*j^*M$.

Proposition 2.2.1 *Pour tout $p \in \mathbf{N}$, ${}_qj_+^{(p)}j^*M$ est holonome si M l'est.*

Démonstration. On se ramène au cas $p = 1$ en constatant que

$$_q j_+^{(p)} j^* M = ({}_q j_+^{(1)} j^*) \cdots ({}_q j_+^{(1)} j^*) M.$$

Dans la suite, nous noterons $_q j_+$ au lieu de $_q j_+^{(1)}$ et nous supposerons que $M = \varphi(M)$. Soit N un sous-$k[x]\langle\tau\rangle$-module de M qui l'engendre et qui est de dimension $\leq n$ (donné par le corollaire 2.1.5). On garde les mêmes notations que ci-dessus pour N. Considérons la filtration suivante de $_q j_+ j^* N$:

$$T_\ell({}_q j_+ j^* N) \overset{\text{déf}}{=} \left\{ \prod_{j=-\ell}^{\ell} (x_1 - q^j)^{-1} \otimes m \,\middle|\, m \in T_{3\ell} N \right\}.$$

on obtient bien ainsi une T-filtration : le point à vérifier est que

$$\tau_1 \cdot T_\ell({}_q j_+ j^* N) \subset T_{\ell+1}({}_q j_+ j^* N).$$

On a

$$\tau_1 \cdot \left[\prod_{j=-\ell}^{\ell} (x_1 - q^j)^{-1} \otimes m \right] = \prod_{j=-(\ell+1)}^{\ell+1} (x_1 - q^j)^{-1} \otimes \Big((x_1 - q^\ell)(x_1 - q^{\ell+1}) \tau_1 m \Big)$$

et on a bien

$$(x_1 - q^\ell)(x_1 - q^{\ell+1}) \tau_1 m \in T_{3(\ell+1)} N$$

si $m \in T_{3\ell} N$.

Cette filtration est exhaustive : tout élément de $_q j_+ j^* N$ s'écrit sous la forme $\prod_{j=-\ell}^{\ell} (x_1 - q^j)^{-1} \otimes m$ pour un certain ℓ et un certain $m \in N$. Supposons que $m \in T_\lambda N$. On peut aussi écrire l'élément sous la forme

$$\prod_{j=-(\ell+i)}^{\ell+i} (x_1 - q^j)^{-1} \otimes \left(\prod_{|j|=\ell+1}^{\ell+i} (x_1 - q^j) m \right)$$

pour tout $i \geq 0$ et on a $m' \overset{\text{déf}}{=} \prod_{|j|=\ell+1}^{\ell+i} (x_1 - q^j) m \in T_{\lambda+2i} N$. Si on choisit $i = \lambda$, on en déduit que $\lambda + 2i \leq 3\ell + 3i$ et donc $m' \in T_{3(\ell+i)} N$. Ceci montre donc que l'élément considéré est dans $T_{\ell+\lambda}({}_q j_+ j^* N)$.

Enfin, on a

$$\dim T_\ell({}_q j_+ j^* N) \leq \dim T_{3\ell} N$$

et par suite $T({}_q j_+ j^* N)$ est une filtration "holonome". On conclut à l'aide du corollaire 2.1.7. $\square$

2.3 Image inverse, image directe et complexe de de Rham

Comme pour les modules micro-différentiels, les opérations de restriction et d'image directe sont liées. Ici, la restriction et l'image directe se correspondent par transformation de Mellin.

Dans la suite nous aurons à utiliser les notions de foncteur dérivé et de catégorie dérivée, pour lesquelles nous renvoyons par exemple au chapitre I de [6]. Nous utiliserons surtout les notations suivantes : si A est un anneau, $D^b(A)$ désigne la catégorie dérivée formée à partir de la catégorie des complexes bornés de A-modules, et $D^-(A)$ (*resp.* $D^+(A)$) à partir de celle des complexes bornés à gauche (*resp.* à droite). Un foncteur T exact à gauche (*resp.* à droite) entre de telles catégories se dérive (dans les cas que nous considèrerons) en un foncteur entre les catégories D^+ (*resp.* D^-) correspondantes et même entre les catégories D^b. Il est noté $\boldsymbol{R}T$ (*resp.* $\boldsymbol{L}T$). En passant à la cohomologie, on retrouve les foncteurs dérivés usuels.

2.3.1 Image inverse. Soit $f : T^m \to T^n$ une application monomiale : si on note $x' = (x'_1, \dots, x'_m)$ les coordonnées sur T^m, il existe des formes linéaires $L_1, \dots, L_n$ à coefficients dans $\mathbf{Z}$ telles que pour $i = 1, \dots, n$ on ait

$$f_i(x') = {x'}^{L_i}.$$

On peut munir l'anneau $f^*\mathcal{E}(T^n) \overset{\text{déf}}{=} k[x', {x'}^{-1}] \otimes_{k[x,x^{-1}]} \mathcal{E}(T^n)$ d'une structure de $\mathcal{E}(T^m)$-module à gauche : si $[\Lambda_1, \dots, \Lambda_m]$ désigne la matrice transposée de $[L_1, \dots, L_n]$, on pose, pour $j = 1, \dots, m$:

$$\tau'_j \cdot (1 \otimes P) = 1 \otimes (\tau^{\Lambda_j} \cdot P)$$

et on note $\mathcal{E}_{T^m \to T^n}$ le $(\mathcal{E}(T^m), \mathcal{E}(T^n))$-bi-module (à gauche et à droite) ainsi obtenu. Si M est un $\mathcal{E}$-module à gauche, on pose

$$f^! M \overset{\text{déf}}{=} \mathcal{E}_{T^m \to T^n} \overset{\boldsymbol{L}}{\underset{\mathcal{E}(T^n)}{\otimes}} M$$

qui est objet de la catégorie dérivée $D^-(\mathcal{E}(T^m))$. Si $f : T^m \to T^n$ et $g : T^p \to T^m$ sont deux telles applications, on a $(f \circ g)^! \simeq g^! \circ f^!$.

Proposition 2.3.2 *Si M est $\mathcal{E}(T^n)$-holonome, alors $f^!M$ est un objet à cohomologie holonome de $D^b(\mathcal{E}(T^m))$.*

Démonstration. Comme pour l'algèbre de Weyl, on se ramène au cas où f est une projection, qui se traite sans difficulté, et au cas d'une immersion d'un tore, qu'on peut supposer de codimension 1, et, après un changement torique de variables et la transformation canonique correspondante, défini par l'équation $\{x_1 - 1 = 0\}$. On dispose alors d'une résolution libre de $\mathcal{E}_{T^{n-1} \to T^n}$ comme $\mathcal{E}(T^n)$-module à droite :

$$0 \longrightarrow \mathcal{E}(T^n) \xrightarrow{(x_1-1)\cdot} \mathcal{E}(T^n) \longrightarrow \mathcal{E}_{T^{n-1} \to T^n} \longrightarrow 0$$

et donc $f^!M$ est représenté par le complexe

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{x_1 - 1} M \longrightarrow 0$$

où le terme M de droite est placé en degré 0, autrement dit le complexe $\boldsymbol{L}f^*M$ au sens des $k[x, x^{-1}]$-modules.

Supposons d'abord que M est à q-support dans T^{n-1}. On a vu que l'on a une décomposition $M = \oplus_j M_j$ avec $M_j = \mathrm{Ker}\,(x_1 - q^j)^N$ pour $N \gg 0$. Alors $x_1 - 1$ agit de manière inversible sur tout M_j avec $j \neq 0$. Par suite $f^! M$ est quasi-isomorphe au complexe

$$0 \longrightarrow M_0 \xrightarrow{x_1 - 1} M_0 \longrightarrow 0$$

et puisque M_0 est ${}_q\mathcal{E}(T^{n-1})$-holonome, il en est de même de la cohomologie de ce complexe.

Il suffit donc de montrer la proposition pour M sans q-torsion dans T^{n-1}. On a une suite exacte de modules holonomes

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow {}_qj_+j^*M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

et M'' est à q-support dans T^{n-1}. D'autre part, la multiplication par $x_1 - 1$ est injective sur M et ${}_qj_+j^*M$. Soit

$$K'' = \mathrm{Ker}\,[(x_1 - 1) : M'' \to M''] \qquad \text{et} \qquad C = \mathrm{Coker}\,[(x_1 - 1) : M \to M].$$

L'application naturelle $K'' \to C$ est ${}_q\mathcal{E}(T^{n-1})$-linéaire et injective. Montrons qu'elle est surjective : tout élément $m \in M$ s'écrit $(x_1 - 1) \cdot m'$ avec $m' \in {}_qj_+j^*M$. L'image m'' de m' dans M'' vérifie $(x_1 - 1) \cdot m'' = 0$, donc est dans K''. Ceci permet de définir l'application inverse $C \to K''$. □

2.3.3 Image directe. Soit $f : T^m \to T^n$ comme ci-dessus. Si M est un ${}_q\mathcal{E}(T^m)$-module à droite, l'image directe f_+M est définie par

$$f_+M \overset{\text{déf}}{=} M \overset{\boldsymbol{L}}{\underset{{}_q\mathcal{E}(T^m)}{\otimes}} {}_q\mathcal{E}_{T^m \to T^n}$$

qui est un objet de $D^-({}_q\mathcal{E}(T^n)^d)$ (modules à droite). On définit l'image directe pour les ${}_q\mathcal{E}$ -modules à gauche par double transposition.

Proposition 2.3.4 *Si M est holonome sur ${}_q\mathcal{E}(T^m)$, alors f_+M est un objet de $D^b({}_q\mathcal{E}(T^n))$ à cohomologie holonome.*

Démonstration. On se ramène au cas d'une projection. Si on choisit un isomorphisme $T^m \simeq T^n \times T^p$ qui fait de f la première projection, et si $i : T^n \times \{1\} \hookrightarrow T^m$ désigne l'inclusion, on a, en notant par $\mathfrak{M}(M)$ le transformé de Mellin de M

$$\mathfrak{M}(f_+M) \simeq i^! \mathfrak{M}(M)$$

et on peut appliquer la proposition 2.3.2. □

2.3.5 q-analogue du complexe de de Rham. Si M est ${}_q\mathcal{E}(T^n)$-holonome, nous notons ${}_q\mathrm{DR}(M) = f_+M$ lorsque $f : T^n \to \{1\}$ est l'application constante (sur le tore de dimension 0). Le complexe de de Rham est donc à cohomologie de dimension finie sur k. Il est représenté par le complexe simple associé au n-cube dont les sommets sont tous égaux à M et les arêtes dans la direction du $j^{\text{ème}}$ vecteur de base égales à la multiplication à gauche par $\tau_j - 1$, le sommet en multi-degré $(0, \dots, 0)$ étant celui où aboutissent toutes les flèches. C'est encore le complexe $\Omega^\bullet_{T^n} \otimes_{k[x,x^{-1}]} M[n]$ où la différentielle δ est donnée par la formule

$$\delta(\omega \otimes m) = d\omega \otimes m + \sum_i \frac{dx_i}{x_i} \wedge \omega \otimes (\tau_i \cdot m)$$

et l'on rappelle que $[n]$ signifie qu'on a décalé le complexe, autrement on place le terme correspondant à Ω^n en degré 0.

2.4 Produit tensoriel et produit de convolution

Soient M et M' deux ${}_q\mathcal{E}(T^n)$-modules à gauche. Alors $M \otimes_{k[x,x^{-1}]} M'$ est naturellement muni d'une structure de ${}_q\mathcal{E}(T^n)$-module à gauche : on définit

$$\tau_j \cdot (m \otimes m') = (\tau_j \cdot m) \otimes (\tau_j \cdot m').$$

En utilisant une résolution libre de M sur ${}_q\mathcal{E}(T^n)$ on définit de même $M \otimes^{\boldsymbol{L}}_{k[x,x^{-1}]} M'$ comme objet de $D^b({}_q\mathcal{E}(T^n))$.

Proposition 2.4.1 *Si M et M' sont holonomes, $M \otimes^{\boldsymbol{L}}_{k[x,x^{-1}]} M'$ est à cohomologie holonome.*

Démonstration. On utilise le procédé diagonal : le produit tensoriel externe de M et M' est holonome sur ${}_q\mathcal{E}(T^n \times T^n)$ et $M \otimes^{\boldsymbol{L}}_{k[x,x^{-1}]} M'$ en est la restriction à la diagonale, de sorte qu'on peut appliquer la proposition 2.3.2. □

On définit le produit de convolution par transformation de Mellin :

$$\mathfrak{M}\left(M \underset{k[x,x^{-1}]}{\overset{\boldsymbol{L}}{\star}} M'\right) \overset{\text{déf}}{=} \mathfrak{M}(M) \underset{k[x,x^{-1}]}{\overset{\boldsymbol{L}}{\otimes}} \mathfrak{M}(M').$$

2.4.2 Translation. Soit $\boldsymbol{c} = (c_1, \dots, c_n) \in T^n$ et ${}_q\mathcal{L}_{\boldsymbol{c}}$ le système aux q-différences défini de la manière suivante : ${}_q\mathcal{L}_{\boldsymbol{c}}$ est le $k[x, x^{-1}]$-module libre de rang 1 de base e, la structure de ${}_q\mathcal{E}$-module étant donnée par

$$\tau_j \cdot e = c_j e.$$

Si on choisit α tel que $c_j = q^{\alpha_j}$ pour $j = 1, \dots, n$, on pourra noter

$${}_q\mathcal{L}_{\boldsymbol{c}} = k[x, x^{-1}] \cdot x^\alpha.$$

En particulier, le transformé de Mellin de ${}_q\mathcal{L}_{\boldsymbol{c}}$ est à q-support dans $\{x = \boldsymbol{c}^{-1}\}$. Soit M un ${}_q\mathcal{E}$-module holonome. Alors $M \otimes_{k[x,x^{-1}]} {}_q\mathcal{L}_{\boldsymbol{c}} = M \cdot x^\alpha$ est isomorphe à M comme $k[x, x^{-1}]$-module et l'action de τ est multipliée par q^α :

$$\tau_j \cdot (mx^\alpha) = (q^{\alpha_j} \tau_j \cdot m) x^\alpha.$$

Le translaté en $\boldsymbol{c} \in T^n$ du module M est le module $\mathsf{T}^*_{\boldsymbol{c}} M$ égal à M comme $k[\tau, \tau^{-1}]$-module et sur lequel x_j opère par $(1/c_j)x_j$. On a

$$\mathfrak{M}(\mathsf{T}^*_{\boldsymbol{c}} M) = \mathfrak{M}(M) \otimes_{k[x,x^{-1}]} {}_q\mathcal{L}_{\boldsymbol{c}} = \mathfrak{M}(M) \cdot x^\alpha.$$

Si M est holonome, il en est de même de $\mathsf{T}^*_{\boldsymbol{c}} M$. On peut alors définir la restriction de M au translaté du sous-tore $T^m \subset T^n$ passant par $\boldsymbol{c}$ comme étant la restriction de $\mathsf{T}^*_{\boldsymbol{c}} M$ au sous-tore T^m, et même chose pour la q-localisation. Par exemple, la restriction au translaté du sous-tore d'équation $x_1 - c_1 = 0$ est donnée par le complexe

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{x_1 - c_1} M \longrightarrow 0$$

Proposition 2.4.3 *Soit M un ${}_q\mathcal{E}$-module holonome. Alors, pour $\boldsymbol{c} \in T^n$ assez général, le complexe ${}_q\mathrm{DR}(M \otimes_{k[x,x^{-1}]} {}_q\mathcal{L}_{\boldsymbol{c}})$ n'a de cohomologie non nulle qu'en degré* 0 *au plus.*

Démonstration. Soit $i_{\boldsymbol{c}} : \{\boldsymbol{c}\} \hookrightarrow T^n$ l'inclusion. On peut écrire

$$\begin{aligned} {}_q\mathrm{DR}(M \otimes_{k[x,x^{-1}]} {}_q\mathcal{L}_{\boldsymbol{c}}) &= i_1^! \mathfrak{M}\left(M \otimes_{k[x,x^{-1}]} {}_q\mathcal{L}_{\boldsymbol{c}}\right) \\ &= i_1^! \mathsf{T}^*_{\boldsymbol{c}^{-1}} \mathfrak{M}(M) \\ &= i^!_{\boldsymbol{c}^{-1}} \mathfrak{M}(M). \end{aligned}$$

Si $\boldsymbol{c}$ est assez général, $\mathfrak{M}(M)$ est localement libre sur $\mathcal{O}_{T^n}$ au voisinage de $\boldsymbol{c}^{-1}$ (*voir* §2.5.3) et puisque $i^!_{\boldsymbol{c}^{-1}} \mathfrak{M}(M) = \boldsymbol{L} i^*_{\boldsymbol{c}^{-1}} \mathfrak{M}(M)$ comme $\mathcal{O}_{T^n}$-module, on en déduit le résultat. □

Remarque. Soit M un ${}_q\mathcal{E}$-module holonome. Appelons *lieu singulier* de M l'ensemble des points x du tore T^n en lesquels M n'est pas localement libre de type fini sur $\mathcal{O}_{T^n,x}$ (hors du lieu singulier, M est l'analogue d'une connexion plate). Ce lieu est stable sous l'action de $q^{\mathbf{Z}}$. Alors pour que la conclusion de la proposition 2.4.3 soit satisfaite, il suffit que $\boldsymbol{c}^{-1}$ ne soit pas dans le lieu singulier de $\mathfrak{M}(M)$.

2.5 Localisation

Fixons une décomposition $T^n \simeq T^1 \times T^{n-1}$ et soit $(x_1; x_2, \ldots, x_n)$ un système de coordonnées adapté à cette décomposition. Notons ${}_q\mathcal{E}' = {}_q\mathcal{E}(T^{n-1})$ et ${}_q\mathcal{E}'_{k(x_1)} = k(x_1) \otimes_k {}_q\mathcal{E}'$.

Proposition 2.5.1 *Soit M un ${}_q\mathcal{E}(T^n)$-module holonome. Alors $k(x_1) \otimes_{k[x_1,x_1^{-1}]} M$ est un ${}_q\mathcal{E}'_{k(x_1)}$-module holonome (donc de type fini).*

En itérant cet énoncé on en déduit :

Corollaire 2.5.2 *Soit M un ${}_q\mathcal{E}(T^n)$-module holonome. Alors $k(x) \otimes_{k[x,x^{-1}]} M$ est un $k(x)$-espace vectoriel de dimension finie.* $\square$

Démonstration de la proposition 2.5.1. On considère une variable indépendante y_1 et le corps $k(y_1)$. Nous pouvons appliquer la proposition 2.3.2 au ${}_q\mathcal{E}_{k(y_1)}$-module holonome $k(y_1) \otimes_k M$ et à la restriction au translaté de sous-tore défini par l'équation $x_1 - y_1 = 0$. Par suite, le noyau et le conoyau de

$$k(y_1) \otimes_k M \xrightarrow{x_1 - y_1} k(y_1) \otimes_k M$$

sont holonomes sur ${}_q\mathcal{E}'_{k(y_1)}$. Considérons le morphisme

$$k[y_1] \otimes_k M \xrightarrow{x_1 - y_1} k[y_1] \otimes_k M.$$

Le noyau de ce morphisme est nul et le conoyau est isomorphe à M, l'action induite par y_1 sur le conoyau correspondant à celle de x_1 sur M. Par platitude de $k(y_1)$ sur $k[y_1]$, on en déduit que le noyau du premier morphisme est nul et que son conoyau s'identifie à $k(x_1) \otimes_{k[x_1,x_1^{-1}]} M$. $\square$

Remarque. Considérons de nouvelles variables $y = (y_1, \ldots, y_n)$, posons $K = k(y)$ et soit ${}_q\mathcal{L}_K$ le $K(x)$-espace vectoriel de dimension 1 de base e, muni de l'action de τ donnée dans la base e par $\tau_i \cdot e = y_i e$ (il est suggestif de poser $y_i = q^{s_i}$ et $e = x_1^{s_1} \cdots x_n^{s_n}$). Le localisé du transformé de Mellin du ${}_q\mathcal{E}$-module holonome M se calcule alors de la manière suivante :

$$k(x) \otimes_{k[x,x^{-1}]} \mathfrak{M}(M) (= k(\tau) \otimes_{k[\tau,\tau^{-1}]} M) = \pi_+ \left(M \otimes_k {}_q\mathcal{L}_K\right)$$

où π est l'application $T^n_K \to \{1\}$ et où on identifie comme plus haut l'action de x à celle de y. Cette formule implique en particulier que ${}_q\mathrm{DR}(M \otimes_k {}_q\mathcal{L}_K)$ n'a de cohomologie non nulle qu'en degré 0 au plus, de manière analogue à 2.4.3.

2.5.3 Il résulte du corollaire 2.5.2 que si M est ${}_q\mathcal{E}$-holonome, il existe une intersection dénombrable U d'ouverts de Zariski du tore T^n sur laquelle le module $M_{|U}$ est un faisceau localement libre sur $\mathcal{O}_U$. En effet, il suffit de le montrer lorsque M n'a pas de $k[x, x^{-1}]$-torsion. Soit alors $\boldsymbol{m}$ une famille finie d'éléments de M qui engendrent M sur ${}_q\mathcal{E}$ et $M(x)$ sur $k(x)$. Soit N le $k[x, x^{-1}]$-sous-module de M engendré par $\boldsymbol{m}$. D'une part N est localement libre sur un ouvert de Zariski de T^n. D'autre part M et N coïncident après localisation sur l'ouvert V intersection des ouverts de Zariski d'équation $f = 0$, si f est un q-translaté d'un dénominateur de la matrice de τ_i relativement à $\boldsymbol{m}$. On peut interpréter le rang générique de M (*i.e.* $\dim_{k(x)} k(x) \otimes M$) ou de son transformé de Mellin de la manière suivante :

Proposition 2.5.4 *Soit M un ${}_q\mathcal{E}$-module holonome et $\mathfrak{M}(M)$ son transformé de Mellin. Alors le rang générique de M (*resp. *de $\mathfrak{M}(M)$) est égal à la caractéristique d'Euler du complexe ${}_q\mathrm{DR}(\mathfrak{M}(M))$ (*resp. *${}_q\mathrm{DR}(M)$).*

Démonstration. Elle est analogue à celle de [10, théorème 2–(1)]. Nous allons l'esquisser. Notons $i : \{1\} \hookrightarrow T^n$ l'inclusion. Alors ${}_q\mathrm{DR}(\mathfrak{M}(M))$ est égal à $i^! M$. Il s'agit de voir que les restrictions de M au point générique de T^n et au point fermé $\{1\}$ ont même caractéristique d'Euler. Appelons *réseau* de M un sous-$k[x, x^{-1}]$-module N de type fini tel que

$$k(x) \otimes_{k[x,x^{-1}]} N = k(x) \otimes_{k[x,x^{-1}]} M.$$

Pour un tel module N on a $\chi(\boldsymbol{L}i^* N) = \dim_{k(x)} k(x) \otimes_{k[x,x^{-1}]} N$ de sorte qu'il suffit de montrer que $\chi(\boldsymbol{L}i^* N) = \chi(i^! M)$. On commence par le montrer lorsque $n = 1$. Si $\mathfrak{M}$ est à q-support $\{x_1 = 1\}$ le résultat est clair. On peut donc supposer que $\mathfrak{M}$ n'a pas de torsion à support l'origine. Posons $M_0 = N$ et pour $j \geq 0$,

$$M_j = \sum_{\{\sigma \in \mathbf{Z} |\ |\sigma| \leq j\}} \tau_1^\sigma N.$$

Alors pour tout j on a

$$k(x_1) \otimes_{k[x_1,x_1^{-1}]} M_j = k(x_1) \otimes_{k[x_1,x_1^{-1}]} M$$

et par suite M_{j+1}/M_j est de torsion sur $k[x_1, x_1^{-1}]$. Soit $B \in k[x_1, x_1^{-1}]$ tel que $B \cdot (M_1/M_0) = 0$. On a par suite

$$\Big[B(q^j x_1) B(q^{-j} x_1)\Big] \cdot M_{j+1}/M_j = 0$$

et donc pour tout j assez grand, M_{j+1}/M_j est un $k[x_1, x_1^{-1}]$-module de type fini dont le support ne contient pas $\{1\}$. Par suite on a $\boldsymbol{L}i^* \left(M_{j+1}/M_j\right) \simeq 0$ et par passage à la limite inductive on a, pour j assez grand, $\boldsymbol{L}i^* (M/M_j) \simeq 0$, d'où $\chi(i^! M) = \chi(\boldsymbol{L}i^* M_j) = \chi(\boldsymbol{L}i^* N)$. Lorsque $n > 1$, on raisonne par récurrence sur n en considérant la restriction à un sous-tore de codimension 1 général. $\square$

2.6 Polynôme de Bernstein et spécialisation

Nous allons construire à partir d'un ${}_q\mathcal{E}(T^n)$-module holonome M un module holonome sur ${}_q\mathcal{E}(T^{n-1})$ en spécialisant le long de $x_1 = 0$, c'est à dire dans une direction à l'infini du tore. L'opération est analogue à celle de spécialisation modérée des modules holonomes sur l'algèbre de Weyl (*voir* par exemple [12]) et repose sur l'existence du polynôme de Bernstein et d'une filtration canonique d'un module holonome.

Choisissons une décomposition $T^n = T^1 \times T^{n-1}$ et des coordonnées $(x_1; \ldots, x_n)$ adaptées à cette décomposition. Notons $V\mathcal{E}(T^n)$ la filtration croissante de $\mathcal{E}(T^n)$ relative à la coordonnée x_1 : posons d'abord $V_0 k[x, x^{-1}] = k[x_1][x', x'^{-1}]$ puis pour tout $j \in \mathbf{Z}$, $V_j k[x, x^{-1}] = x_1^{-j} \cdot V_0 k[x, x^{-1}]$. Enfin

$$V_j(\mathcal{E}(T^n)) = \Big(V_j k[x, x^{-1}]\Big) \langle \tau, \tau^{-1} \rangle.$$

Proposition 2.6.1 *Soit M un $\mathcal{E}(T^n)$-module holonome et $m \in M$. Il existe un polynôme non nul $b_m \in k[\tau_1, \tau_1^{-1}]$ et un opérateur $P_m \in V_0(\mathcal{E}(T^n))$ tels qu'on ait*

$$b_m(\tau_1, \tau_1^{-1}) \cdot m = x_1 P_m \cdot m.$$

Démonstration. On peut supposer que $M = \mathcal{E}(T^n) \cdot m$. Du fait que le module

$$M' \overset{\text{déf}}{=} k(\tau_1) \otimes_{k[\tau_1, \tau_1^{-1}]} M$$

est de type fini sur $\mathcal{E}'_{k(\tau_1)}$ (d'après la proposition 2.5.1), il existe $\ell \geq 0$ tel que

$$1 \otimes x_1^{-\ell} m, \ldots, 1 \otimes m, \ldots, 1 \otimes x_1^{\ell} m$$

engendrent M' sur $\mathcal{E}'_{k(\tau_1)}$. On peut écrire

$$1 \otimes x_1^{-(\ell+1)} m = \sum_{j=-\ell}^{\ell} Q_j \cdot \Big(1 \otimes x_1^j m\Big)$$

avec $Q_j \in \mathcal{E}'_{k(\tau_1)}$ et on en déduit l'égalité voulue. $\square$

Remarque. L'ensemble des polynômes qui satisfont une relation de ce type est un idéal de $k[\tau_1, \tau_1^{-1}]$. On peut donc choisir un générateur à multiplication près par une puissance de τ_1. On pourra prendre par exemple un polynôme en τ_1 de coefficient dominant égal à 1.

Nous dirons que M *est spécialisable en $x_1 = 0$* s'il existe une filtration UM indexée par $\mathbf{Z}$, bonne pour $V\mathcal{E}(T^n)$, et pour laquelle il existe $b \in k[\tau_1, \tau_1^{-1}]$ non nul avec pour tout $j \in \mathbf{Z}$

$$b(q^j \tau_1) \cdot U_j M \subset U_{j-1} M.$$

Si b_U est un polynôme minimal satisfaisant cette relation, les zéros de b_U (dans une clôture algébrique de k) dépendent de la filtration UM, mais n'en dépendent pas mod $q^{\mathbf{Z}}$. Supposons que k est algébriquement clos et choisissons une section σ' de la projection $k^* \to k^*/q^{\mathbf{Z}}$. Il existe alors une unique bonne filtration de M pour laquelle les zéros de b sont dans l'image de cette section (on le voit comme pour les $\mathcal{D}$-modules, *voir* par exemple [9, 12]). Alors pour tout $j \in \mathbf{Z}$, $\mathrm{gr}_j^V M$ est un $\mathrm{gr}_0^V(\mathcal{E}(T^n))$-module de type fini et donc admet une structure de $\mathcal{E}(T^{n-1})$-module. De plus, l'action de τ_1 est inversible et admet un polynôme minimal, à savoir $b(q^j \tau_1)$.

On en déduit que $\mathrm{gr}^V_j M$ est de type fini sur ${}_q\mathcal{E}(T^{n-1})$ pour tout $j \in \mathbf{Z}$. De plus, la multiplication à gauche par x_1 induit un morphisme de ${}_q\mathcal{E}(T^{n-1})$-modules

$$x_1 : \mathrm{gr}^V_j M \longrightarrow \mathrm{gr}^V_{j-1} M$$

et ce morphisme admet un inverse, à savoir la multiplication à gauche par x_1^{-1}. Nous noterons

$${}_q\psi_{x_1} M \overset{\text{déf}}{=} \mathrm{gr}^V_0 M.$$

Théorème 2.6.2 *Soit M un ${}_q\mathcal{E}(T^n)$-module holonome. Alors le ${}_q\mathcal{E}(T^{n-1})$-module ${}_q\psi_{x_1} M$ est holonome.*

Démonstration. Elle est analogue à celle faite par exemple dans [12] pour les $\mathcal{D}$-modules : on a la notion de module spécialisable et celle de module spécialisable élémentaire. Tout module spécialisable admet ue résolution par de tels modules et on utilise le fait que tout morphisme entre modules spécialisables est strict pour la filtration V. On en déduit alors, en utilisant le corollaire 2.1.4, que $\mathrm{gr}^V M$ est holonome, puis en utilisant le fait que le transformé de Mellin de $\mathrm{gr}^V M$ est à q-support contenu dans une réunion d'ensembles $x_1 =$ constante (à cause de l'équation de Bernstein) que $\mathrm{gr}^V_0 M$ est ${}_q\mathcal{E}(T^{n-1})$-holonome. □

2.7 Systèmes rationnels holonomes d'équations aux q-différences

Le lien entre ${}_q\mathcal{E}$-modules holonomes et systèmes rationnels aux q-différences définis dans l'introduction est donné par le

Théorème 2.7.1

1. *Soit M un ${}_q\mathcal{E}(T^n)$-module holonome. Alors $k(x) \otimes_{k[x,x^{-1}]} M$ est un système rationnel holonome d'équations aux q-différences.*
2. *Inversement, si $M(x)$ est un système rationnel holonome d'équations aux q-différences, il existe pour tout ${}_q\mathcal{E}(T^n)$-module de type fini M' contenu dans $M(x)$ un sous-module holonome M contenu dans M'.*

Démonstration. Le premier point n'est autre que le corollaire 2.5.2. Pour le second, nous pouvons procéder comme dans [8, 5]. Soit $M' \subset M(x)$ un sous-${}_q\mathcal{E}$-module de type fini tel que $k(x) \otimes M' = M(x)$ et soit $N' \subset M'$ un sous-$k[x]\langle\tau\rangle$-module qui l'engendre. Il existe un plus grand sous-module N de dimension $\leq n$ contenu dans N'. Il suffit de montrer que $k(x) \otimes N = M(x)$. La construction de N donnée par exemple dans [5, Chap. 2 §7] montre que N est compatible au changement de base plat. En particulier $k(x) \otimes N$ est le plus grand $k(x)\langle\tau\rangle$-module de dimension (homologique) $\leq n$ contenu dans $M(x)$. On peut aussi définir cette dimension *a la* Hilbert-Samuel en utilisant une bonne filtration relativement au degré en τ. Alors, dire qu'un $k(x)\langle\tau\rangle$-module est de dimension $\leq n$ est équivalent à dire qu'il est de dimension finie sur $k(x)$, d'où le résultat. □

3 ${}_q\mathcal{E}$-modules hypergéométriques

Dans cette section, nous travaillerons sur le corps $\mathbf{C}$ des nombres complexes.

3.1 Le groupe q-hypergéométrique

Rappelons (*voir* l'introduction) qu'un système holonome rationnel aux q-différences est q-hypergéométrique si l'espace vectoriel sur $\mathbf{C}(x)$ est de dimension 1. Les systèmes hypergéométriques à n variables forment un groupe pour le produit tensoriel (sur $\mathbf{C}(x)$), noté ${}_q\mathcal{H}G(n)$. La structure de ce groupe est décrite par K. Aomoto [2] : choisissons pour cela un sous-ensemble $\mathcal{L}$ de formes linéaires non identiquement nulles sur $\mathbf{Q}^n$ à coefficients dans $\mathbf{Z}$ premiers entre eux, tel que pour toute telle forme L on ait soit $L \in \mathcal{L}$, soit $-L \in \mathcal{L}$. Si $\ell_1, \ldots, \ell_n$ sont les coefficients de L, nous notons x^L le monôme $x_1^{\ell_1} \cdots x_n^{\ell_n}$. Soit par ailleurs E_q le groupe abélien $\mathbf{C}^*/q^{\mathbf{Z}}$. Nous noterons $\mathbf{Z}^{[\mathcal{L}\times E_q]}$ l'ensemble des applications $\mathcal{L} \times E_q \to \mathbf{Z}$ à support fini, muni de sa structure naturelle de groupe abélien.

Proposition 3.1.1 ([2]) *Il existe un isomorphisme de groupes abéliens*

$$(E_q)^n \times \mathbf{Z}^{[\mathcal{L}\times E_q]} \xrightarrow{\sim} {}_q\mathcal{H}G(n). \quad \square$$

On peut expliciter un tel isomorphisme en se donnant un section σ de la projection $\mathbf{C}^* \longrightarrow \mathbf{C}^*/q^{\mathbf{Z}} = E_q$ ainsi qu'une section σ' de la projection $\mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}^*$ donnée par $\alpha \mapsto q^\alpha$. Si $(c_1, \ldots, c_n) \in (\mathbf{C}^*)^n$ et $\gamma : \mathcal{L} \times E_q \longrightarrow \mathbf{Z}$ est à support fini, on note

$$\Phi_{[\boldsymbol{c};\gamma]}(x) = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} \cdot \prod_{L\in\mathcal{L}, a\in\mathbf{C}^*/q^{\mathbf{Z}}} \left[(\sigma(a)x^L)_\infty\right]^{\gamma_{L,a}}$$

où l'on a posé $\boldsymbol{c} = (c_1, \ldots, c_n)$, $\alpha_i = \sigma'(c_i)$ et $(t)_\infty = \prod_{j=0}^\infty (1-q^j t)$. Alors $\Phi_{[\boldsymbol{c};\gamma]}(x)$ est une fonction quasi-méromorphe de x (*i.e.* un produit d'une fonction méromorphe par un monôme à puissances complexes). Notons $\mathfrak{M}_{[\boldsymbol{c};\gamma]}(x)$ le $\mathbf{C}(x)$-espace vectoriel de dimension 1 de base $\Phi_{[\boldsymbol{c};\gamma]}$. On a une action inversible de $\tau_1, \ldots, \tau_n$ puisque $\tau_i \cdot \Phi_{[\boldsymbol{c};\gamma]}$ est un $\mathbf{C}(x)$-multiple de $\Phi_{[\boldsymbol{c};\gamma]}$ pour tout i. Nous avons ainsi un système rationnel aux q-différences qui est hypergéométrique. Ce système est contenu dans le $\mathbf{C}(x)$-espace vectoriel des fonctions quasi-méromorphes et est égal au $\mathbf{C}(x)$-espace vectoriel engendré par tous les q-translatés de $\Phi_{[\boldsymbol{c};\gamma]}$. On vérifie enfin que, γ étant fixé, la classe d'isomorphisme de ce système ne dépend pas du choix des sections σ et σ' et ne dépend que de la classe de $\boldsymbol{c}$ dans $(E_q)^n$.

3.2 ${}_q\mathcal{E}$-modules hypergéométriques irréductibles.

Les résultats de ce paragraphe sont analogues à ceux de [10] (qui concernent les $\mathcal{D}$-modules et les équations aux différences finies). Soit M un ${}_q\mathcal{E}$-module holonome. Nous dirons que M est q-hypergéométrique si son transformé de Mellin $\mathfrak{M}(M)$ (encore noté $\mathfrak{M}$ si aucune confusion n'est à craindre) est génériquement de rang 1, c'est à dire si $\mathfrak{M}(x) \overset{\text{déf}}{=} \mathbf{C}(x) \otimes_{\mathbf{C}[x,x^{-1}]} \mathfrak{M}$ est un système rationnel q-hypergéométrique (la proposition 2.3.4 nous assure la dimension finie de ce $\mathbf{C}(x)$-espace vectoriel).

Lemme 3.2.1 *Soit M un ${}_q\mathcal{E}$-module holonome hypergéométrique. Alors M est irréductible (*i.e.* n'a pas de sous-${}_q\mathcal{E}$-module propre) si et seulement si son transformé de Mellin $\mathfrak{M}$ n'a ni sous-module ni quotient non trivial qui soit de $\mathbf{C}[x, x^{-1}]$-torsion.*

Démonstration. L'assertion porte en fait sur le transformé de Mellin $\mathfrak{M}$ car M est irréductible si et seulement si $\mathfrak{M}$ l'est. Considérons une suite exacte de ${}_q\mathcal{E}$-modules

$$0 \longrightarrow \mathfrak{M}' \longrightarrow \mathfrak{M} \longrightarrow \mathfrak{M}'' \longrightarrow 0.$$

Alors $\mathfrak{M}'$ et $\mathfrak{M}''$ sont holonomes et puisque $\dim_{\mathbf{C}(x)} \mathfrak{M} = 1$ on a ou bien

$$\mathfrak{M}'(x) \xrightarrow{\sim} \mathfrak{M}(x) \qquad \text{et} \qquad \mathfrak{M}''(x) = \{0\} \quad \textit{i.e.}\ \mathfrak{M}'' \text{ est de } \mathbf{C}[x, x^{-1}]\text{-torsion}$$

ou bien

$$\mathfrak{M}(x) \xrightarrow{\sim} \mathfrak{M}''(x) \qquad \text{et} \qquad \mathfrak{M}'(x) = \{0\} \quad \textit{i.e.}\ \mathfrak{M}' \text{ est de } \mathbf{C}[x, x^{-1}]\text{-torsion.}$$

Par suite, si $\mathfrak{M}$ n'a ni sous-module ni quotient non trivial qui soit de torsion, c'est que $\mathfrak{M}$ n'a ni sou-module ni quotient non trivial, donc $\mathfrak{M}$ est irréductible. La réciproque est claire. □

3.2.2 ${}_q\mathcal{E}$-modules hypergéométriques d'une variable. Soient P et Q deux polynômes non nuls d'une variable $x = x_1$ et considérons le ${}_q\mathcal{E}$-module

$$\mathfrak{M}_{P,Q} \stackrel{\text{déf}}{=} {}_q\mathcal{E}(T^1)/{}_q\mathcal{E}(T^1) \cdot (P(x)\tau + Q(x)).$$

Il est immédiat de vérifier que $\mathfrak{M}_{P,Q}(x)$ est de dimension 1. De plus, on vérifie que si P et Q sont sans zéro commun mod $q^{\mathbf{Z}}$ le module $\mathfrak{M}_{P,Q}$ n'a pas de $\mathbf{C}[x, x^{-1}]$-torsion. Comme le dual (sur ${}_q\mathcal{E}$) est du même type, on en déduit aussi que $\mathfrak{M}_{P,Q}$ n'a pas de quotient non trivial qui soit de torsion, autrement dit, si l'on pose

$$M_{P,Q} \stackrel{\text{déf}}{=} {}_q\mathcal{E}(T^1)/{}_q\mathcal{E}(T^1) \cdot (P(\tau^{-1})x + Q(\tau^{-1}))$$

alors $M_{P,Q}$ est un ${}_q\mathcal{E}$-module hypergéométrique irréductible, de transformé de Mellin $\mathfrak{M}_{P,Q}$. Tout sous-$\mathbf{C}[x, x^{-1}]$-module de type fini dans $\mathfrak{M}_{P,Q}$ n'a donc pas de torsion et est de rang générique égal à 1, donc est localement libre de rang 1. En particulier $\mathfrak{M}_{P,Q}$ est limite inductive de tels sous-modules, donc est $\mathbf{C}[x, x^{-1}]$-plat. De plus, l'application naturelle $\mathfrak{M}_{P,Q} \to \mathfrak{M}_{P,Q}(x)$ est injective et on en déduit que chaque élément du groupe hypergéométrique ${}_q\mathcal{H}G(1)$ contient un et un seul (à isomorphisme près) ${}_q\mathcal{E}$-module holonome irréductible $\mathfrak{M}$. Il y a ainsi correspondance bijective entre ${}_q\mathcal{H}G(1)$ et les classes d'isomorphisme de ${}_q\mathcal{E}$-modules holonomes hypergéométriques irréductibles. Enfin, soit $c \in \mathbf{C}^*$ et $\gamma : E_q \to \mathbf{Z}$ à support fini (nous suposons fixées des sections σ et σ'). Considérons le ${}_q\mathcal{E}$-module $\mathfrak{M}_{[c;\gamma]} = \mathfrak{M}_{P,Q}$ avec

$$P(x) = \prod_{\{a \in \mathbf{C}^*/q^{\mathbf{Z}} \mid \gamma(a) > 0\}} (1 - \sigma(a)x)^{\gamma(a)}$$

et

$$Q(x) = -c \prod_{\{a\in\mathbf{C}^*/q^{\mathbf{Z}} \mid \gamma(a)<0\}} (1-\sigma(a)x)^{-\gamma(a)}.$$

L'application ${}_q\mathcal{E}(T^1) \to {}_q\mathcal{E}(T^1)\cdot\Phi_{[c;\gamma]}$ induit un morphisme surjectif de $\mathfrak{M}_{[c;\gamma]}$ sur le sous-$\mathbf{C}[x,x^{-1}]$-module de l'espace des fonctions quasi-méromorphes engendré par les q-translatés de $\Phi_{[c;\gamma]}$. Puisque $\mathfrak{M}_{[c;\gamma]}$ est irréductible, ce morphisme est un isomorphisme. On dispose ainsi d'une réalisation de $\mathfrak{M}_{[c;\gamma]}$ dans l'espace des fonctions quasi-méromorphes sur T^1.

3.2.3 Nous allons maintenant étendre ces résultats au cas de n variables. Soit L une forme linéaire primitive sur $\mathbf{Q}^n$. Si P et Q sont comme ci-dessus, notons $\mathfrak{M}_{P,Q,L}$ le ${}_q\mathcal{E}(T^n)$-module $L^+\mathfrak{M}_{P,Q}$, où L désigne aussi l'application monomiale

$$\begin{array}{ccc} (\mathbf{C}^*)^n & \longrightarrow & \mathbf{C}^* \\ (x_1,\ldots,x_n) & \longmapsto & x^L \end{array}$$

On déduit des résultats précédents et de ceux du §2.3.1 :

Lemme 3.2.4 *Le ${}_q\mathcal{E}(T^n)$-module $\mathfrak{M}_{P,Q,L}$ est holonome et de plus est limite inductive de $\mathbf{C}[x,x^{-1}]$-modules localement libres de rang 1, donc est $\mathbf{C}[x,x^{-1}]$-plat. Il en est de même pour tout produit tensoriel (sur $\mathbf{C}[x,x^{-1}]$) d'un nombre fini de tels modules.* □

Théorème 3.2.5

1. *La correspondance qui à un ${}_q\mathcal{E}(T^n)$-module holonome q-hypergéométrique associe le système rationnel $\mathfrak{M}(x)$ (où $\mathfrak{M}$ désigne le transformé de Mellin de M) induit une bijection entre l'ensemble des classes d'isomorphisme de ${}_q\mathcal{E}$-modules holonomes hypergéométriques irréductibles et le groupe ${}_q\mathcal{H}G(n)$.*
2. *Si M est q-hypergéométrique irréductible et si $\mathfrak{M}(x) = \mathfrak{M}_{[\boldsymbol{c};\gamma]}(x)$, alors $\mathfrak{M}$ s'identifie à un sous-module $\mathfrak{M}_{[\boldsymbol{c};\gamma]} \overset{\text{déf}}{=} {}_q\mathcal{E}(T^n)\Phi_{[\boldsymbol{c};\gamma]}$ de l'espace des fonctions quasi-méromorphes sur T^n. De plus, ce dernier ${}_q\mathcal{E}$-module est holonome.*

Démonstration. On commence par vérifier que $\mathfrak{M}_{[\boldsymbol{c};\gamma]}$ est holonome : pour cela, on voit que $\mathfrak{M}_{[\boldsymbol{c};\gamma]}$ est sans $\mathbf{C}[x,x^{-1}]$-torsion et quotient d'un produit tensoriel de $\mathfrak{M}_{P,Q,L}$ pour P,Q,L bien choisis. Ces modules étant plats, et tous les modules ayant rang générique égal à 1, on a en fait égalité. On en déduit l'assertion.

Ensuite, $\mathfrak{M}_{[\boldsymbol{c};\gamma]}$ contient un sous-module irréductible (la catégorie des modules holonomes est artinienne).

Enfin, on montre que $\mathfrak{M}_{[\boldsymbol{c};\gamma]}(x)$ contient au plus un sous-module holonome irréductible: soient $\mathfrak{M}'$ et $\mathfrak{M}''$ deux tels modules et m' et m'' des générateurs respectifs sur ${}_q\mathcal{E}(T^n)$. Alors, puisque $\mathfrak{M}'(x) = \mathfrak{M}''(x) = \mathfrak{M}_{[\boldsymbol{c};\gamma]}(x)$ a pour base la classe de m' ou celle de m'', il existe p' et $p'' \in \mathbf{C}[x]$ avec

$$p'(x)\cdot m' = p''(x)\cdot m'' \neq 0.$$

On a, du fait de l'irréductibilité de $\mathfrak{M}'$ et de $\mathfrak{M}''$

$$\begin{array}{rcccccl} \mathfrak{M}' & = & {}_q\mathcal{E}(T^n)\cdot m' & = & {}_q\mathcal{E}(T^n)\cdot p'(x)m' & = & {}_q\mathcal{E}(T^n)\cdot p''(x)m'' \\ & & & = & {}_q\mathcal{E}(T^n)\cdot m'' & = & \mathfrak{M}''. \end{array}$$

□

Corollaire 3.2.6 *Soit $M_{[\boldsymbol{c};\gamma]}$ un ${}_q\mathcal{E}$-module hypergéométrique de transformé de Mellin $\mathfrak{M}_{[\boldsymbol{c};\gamma]}$. Alors*

1. *Le complexe de de Rham ${}_q\mathrm{DR}(\mathfrak{M}_{[\boldsymbol{c};\gamma]})$ est à cohomologie de dimension finie sur $\mathbf{C}$.*
2. *Si $[\boldsymbol{c}] \in (E_q)^n$ est assez général, on a $H^j({}_q\mathrm{DR}(\mathfrak{M}_{[\boldsymbol{c};\gamma]})) = \{0\}$ pour $j \neq 0$.*
3. *Si les formes linéaires L pour lesquelles il existe $a \in E_q$ avec $\gamma_{L,a} \neq 0$ n'engendrent pas l'espace $(\mathbf{Q}^n)^*$ des formes linéaires sur $\mathbf{Q}^n$, alors la caractéristique d'Euler $\chi({}_q\mathrm{DR}(\mathfrak{M}_{[\boldsymbol{c};\gamma]}))$ est nulle et $M_{[\boldsymbol{c};\gamma]}$ est de $\mathbf{C}[x, x^{-1}]$-torsion.*

Démonstration. Le premier point est conséquence de la proposition 2.3.4 puisque $\mathfrak{M}_{[\boldsymbol{c};\gamma]}$ est holonome. Le second résulte de la proposition 2.4.3. Pour le troisième point, choisissons des coordonnées $(x_1, \ldots, x_m, x_{m+1}, \ldots, x_n)$ sur T^n telles que les formes linéaires ne dépendent que des variables $(x_1, \ldots, x_m)$ et soit $T^n \simeq T^m \times T^{n-m}$ la décomposition correspondante. Alors par hypothèse $\mathfrak{M}_{[\boldsymbol{c};\gamma]}$ est image inverse par la projection sur T^m d'un module du même type. Par suite son transformé de Mellin est image directe par l'inclusion $T^m \times \{1\}$ d'un module holonome, d'où l'assertion. □

3.2.7 Dans [2, 3], K. Aomoto introduit un ${}_q\mathcal{E}$-module qu'il note V et pose quelques questions sur le complexe de de Rham de V. Nous allons comparer les constructions de *loc. cit.* avec celles faites ci-dessus, ce qui nous permettra de donner des réponses à certaines des questions qui y sont posées. Notons d'abord que nous nous plaçons dans un cadre un peu plus général que celui de *loc. cit.*, c'est à dire que nous ne faisons pas l'hypothèse de régularité $\sum \gamma_{L,a} = 0$. Dans *loc. cit.*, ce que nous notons c_i est noté u_i et $\sigma(a)$ est noté v. De plus, les opérateurs τ sont notés Q. Pour $\boldsymbol{c}$ et une famille $\sigma(a)$ fixés, K. Aomoto considère un espace qu'il note $V \cdot \Phi$. Cet espace est en fait un sous-${}_q\mathcal{E}$-module du module $\mathfrak{M}'_{[\boldsymbol{c};\gamma]}$ obtenu de la manière suivante : si (L, a) est un couple tel que $\gamma_{L,a} \neq 0$, considérons le module ${}_qj_+^{(p)}j^*\mathfrak{M}_{[\boldsymbol{c};\gamma]}$ avec $p = \gamma_{L,a}$ et j est l'inclusion $T^n - \left\{(1-\sigma(a)x^L) = 0\right\} \hookrightarrow T^n$; le module $\mathfrak{M}'_{[\boldsymbol{c};\gamma]}$ est obtenu en q-localisant de cette manière le module $\mathfrak{M}_{[\boldsymbol{c};\gamma]}$ pour tous les couples (L, a) tels que $\gamma_{L,a} \neq 0$. On déduit des résultats précédents que $V \cdot \Phi$ est holonome. Le q-analogue du complexe de de Rham de $V \cdot \Phi$, considéré par K. Aomoto, est donc à cohomologie de dimension finie. Par ailleurs, pour $\boldsymbol{c}$ assez général dans T^n, ce complexe n'a de cohomologie qu'en degré 0, d'après le corollaire 3.2.6-2 (on rappelle les conventions de décalage pour le complexe de de Rham).

On peut, comme dans [3], considérer les $\sigma(a)$ comme de nouvelles variables, notées v. Pour γ fixé, on construit alors un module $\mathfrak{M}_\gamma$ sur l'anneau

$$\mathbf{C}[x, v, x^{-1}, v^{-1}]\langle \tau, \tau_v, \tau^{-1}, \tau_v^{-1} \rangle$$

en considérant l'action de τ et τ_v sur Φ. Le fait que $\mathfrak{M}_\gamma$ soit holonome se montre comme pour $\mathfrak{M}_{[\boldsymbol{C};\gamma]}$, en décomposant $\mathfrak{M}_\gamma$ en produit tensoriel de modules à un seul facteur. K. Aomoto considère alors le transformé de Mellin partiel de $\mathfrak{M}_\gamma$ par rapport aux variables x. Les nouvelles variables sont notées u dans [3]. Il résulte de la remarque suivant 2.5.2 que ce transformé de Mellin définit, après tensorisation par $\mathbf{C}(u)$ (et donc aussi $\mathbf{C}(u, v)$) un système rationnel holonome d'équations aux q-différences, ce qui répond aussi à une question de [3].

Références

[1] K. Aomoto, A note on holonomic q-difference systems, Algebraic Analysis (in honor of M. Sato), M. Kashiwara and T. Kawai eds., Academic Press, (1988), 25–28.

[2] K. Aomoto, q-analogue of de Rham cohomology associated with Jackson integrals, Proc. Japan Acad. 66 (1990), 161–164.

[3] K. Aomoto, Finiteness of a cohomology associated with certain Jackson integrals, Tohoku J. Math. 43 (1991), 75–101.

[4] J. Bernstein, The analytic continuation of generalized functions with respect to a parameter, Funct. An. and Appl. 6 (1972), 273–285.

[5] J.-E. Björk, Rings of Differential Operators, North Holland, Amsterdam, 1979.

[6] A. Borel et al., Algebraic $\mathcal{D}$-modules, Perspectives in Math. 2 Academic Press, Boston, 1987.

[7] F. Ehlers, The Weyl Algebra, Chapitre V de [6], 173–205.

[8] M. Kashiwara, B-functions and holonomic systems, Invent. Math. 38 (1976), 33–53.

[9] M. Kashiwara, Vanishing cycles sheaves and holonomic systems of differential equations, Springer Lect. Notes in Math. 1016 (1983), 134–142.

[10] F. Loeser, C. Sabbah, Caractérisation des $\mathcal{D}$-modules hypergéométriques irréductibles sur le tore, C. R. Acad. Sci. Paris 312 (1991), 735–738.

[11] Z. Mebkhout, Le formalisme des six opérations de Grothendieck pour les $\mathcal{D}$-modules cohérents, Hermann, Paris, 1989.

[12] Z. Mebkhout, C. Sabbah, $\mathcal{D}$-modules et cycles évanescents, Appendice à [11].