STRUCTURE DE HODGE NON COMMUTATIVE POUR LE MIROIR DE L'ESPACE PROJECTIF (II)

EXPOSÉ À L'ENS, 10 NOVEMBRE 2009

Claude Sabbah

Cet exposé fait suite à l'exposé de Jean-Baptiste Teyssier du 21 octobre 2009.

1. Résumé des épisodes précédents

On s'intéresse à l'espace projectif $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ et à sa cohomologie quantique. La cohomologie (à coefficients complexes) est le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $H = H^*(\mathbb{P}^n(\mathbb{C}), \mathbb{C})$ de dimension $n+1$, muni de sa structure d'anneau induite par le cup-produit, et de sa base canonique $1, h, \dots, h^n$. Le produit quantique permet de définir une connexion sur le $\mathbb{C}[u]$-module libre $H[u] \overset{\text{déf}}{=} \mathbb{C}[u] \otimes_{\mathbb{C}} H$. Dans la base décrite ci-dessus, la matrice de cette connexion est donnée par

$$\nabla_{\partial_u} = \partial_u + (n+1)A\frac{1}{u^2} + B\frac{1}{u},$$

où A est la matrice de la permutation cyclique $1 \mapsto h \mapsto \cdots \mapsto h^n \mapsto 1$ et $B = \operatorname{diag}(0, \dots, n) - (n/2)\operatorname{Id}$.

L'exposé de JBT a permis de voir :

(1) qu'il existe une structure rationnelle $\mathscr{E}_B$ sur le faisceau localement constant des sections horizontales de cette connexion ; cette structure est obtenue en remarquant que la connexion est aussi celle obtenue en considérant les intégrales oscillantes associées à la fonction « miroir de $\mathbb{P}^n$ » sur le tore $(\mathbb{C}^*)^n$ définie par $F(z_1, \dots, z_n) = z_1 + \cdots + z_n + 1/z_1 \cdots z_n$;

(2) qu'on peut interpréter cette structure rationnelle sur le modèle classique de $\mathbb{P}^n$; pour ce faire, on remarque que la cohomologie quantique et sa connexion, telles que définies plus haut, sont en fait munies d'une déformation *intégrable* à un paramètre q sur le modèle classique ; on a donc plus précisément un $\mathbb{C}[u, q, q^{-1}]$-module libre $H[u, q, q^{-1}]$ et une connexion intégrable ∇ telle que

- la matrice de ∇_{∂_u} a la même forme que plus haut, où seule $A = A(q)$ dépend de q : c'est la matrice de l'automorphisme $1 \mapsto h \mapsto \cdots \mapsto h^n \mapsto q$,
- la matrice de ∇_{∂_q} est $-A(q) \cdot 1/qu$.

On cherche à décrire un réseau dans le système local (sur $(\mathbb{C}^*)^2$) des sections horizontales de ∇, dont la restriction à $q = 1$ donne le réseau $\mathscr{E}_B$. Par horizontalité, il suffit de décrire ce réseau pour $|q| \ll 0$. L'exposé de JBT

- a donné la construction d'un réseau à la « limite » (encore appelée cycles proches) $q \to 0$, en termes de données sur $\mathbb{P}^n$,
- a montré comment ce réseau s'étend pour $|q| \ll 0$, puis par horizontalité pour tout q,
- et enfin l'a comparé au réseau $\mathscr{E}_B$ en $q = 1$ et a montré l'égalité des deux.

***Remarque 1.1* (Que manque-t-il ?).** L'exposé précédent de Giovanni Morando a donné les outils pour montrer que la considération des intégrales oscillantes sur des onglets de Lefschetz permet de vérifier l'axiome de $\mathbb{Q}$-structure. Par contre, le procédé de passage à la limite $q \to 0$ n'a pas explicité la manière de retrouver les matrices de Stokes à partir de la cohomologie rationnelle de $\mathbb{P}^n$. Il faut noter que ceci est en principe possible, c'est-à-dire que si on sait que l'axiome de $\mathbb{Q}$-structure est satisfait pour $|q| \ll 0$, il l'est pour tout q (dans notre exemple), par un principe d'horizontalité qui s'applique aussi aux matrices de Stokes.

***Remarque 1.2* (sur l'axiome d'opposition).** On s'intéresse dans cet exposé à l'axiome d'opposition. Il faut commencer par remarquer que la méthode de passage à la limite utilisée précédemment ne fonctionne plus, car la propriété d'opposition ne se transporte *a priori* pas par horizontalité. C'est une propriété *ouverte* par rapport à q cependant, du fait que dans une famille analytique réelle de fibrés holomorphes sur $\mathbb{P}^1$ (coordonnée u), la propriété d'être trivial est ouverte. Autrement dit, si on avait un moyen de montrer la propriété d'opposition à la limite $q \to 0$, on en déduirait la propriété d'opposition pour $|q| \ll 0$, mais pas nécessairement pour tout q. Aussi on va montrer l'axiome d'opposition pour $q = 1$ (et en fait pour tout $q \neq 0$) directement, en utilisant les intégrales oscillantes.

2. Structure de Hodge non commutative par transformation de Laplace

On dispose d'une structure de Hodge sur la cohomologie (à coefficients constants) d'une variété kählérienne. Plus généralement (Deligne), on en dispose pour la cohomologie à coefficients dans un faisceau localement constant qui est sous-jacent à une variation de structure de Hodge polarisée. Si ce faisceau localement constant est muni d'une $\mathbb{Q}$-structure (ou d'une $\mathbb{R}$-structure), la cohomologie en hérite.

Zucker a traité le cas des courbes quasi-projectives en 1979, et Cattani-Kaplan-Schmid et Kashiwara-Kawai celui des variétés quasi-projectives à la fin des années 1980. Dans ce cas, la cohomologie qu'il faut prendre pour obtenir une structure de Hodge *pure* est la *cohomologie d'intersection*. Dans le cas des courbes, c'est un objet simple à décrire : si $\mathscr{L}$ est un faisceau localement constant sur une courbe quasi-projective X^* et si $j : X^* \hookrightarrow X$ est l'inclusion dans une projectivisation lisse, alors la cohomologie d'intersection à coefficients dans $\mathscr{L}$ est la cohomologie $H^*(X, j_*\mathscr{L})$ du faisceau $j_*\mathscr{L}$ sur X (qui peut être distincte de $H^*(X^*, \mathscr{L})$). On va considérer dans la suite le cas où $X^* = \mathbb{A}^1 \smallsetminus \{c_1, \dots, c_r\}$ et $X = \mathbb{P}^1$.

2.a. Variation de structure de Hodge polarisée.

Soit $\mathscr{L}$ un faisceau localement constant de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels sur X^*, $L = \mathscr{O}_{X^*} \otimes_{\mathbb{C}} \mathscr{L}$ le fibré holomorphe associé sur X^*, muni de la connexion $\nabla = d \otimes \mathrm{Id}$ telle que $\operatorname{Ker} \nabla = \mathscr{L}$. Une variation de structure de Hodge rationnelle de système local sous-jacent $\mathscr{L}$ consiste en la donnée d'un réseau $\mathscr{L}_{\mathbb{Q}}$ de $\mathscr{L}$ et d'une filtration décroissante de L par des sous-fibrés holomorphes F^pL de sorte que

– en restriction à chaque $x_o \in X^*$, $F^pL_{x_o}$ soit la filtration de Hodge d'une structure de Hodge sur $(L_{x_o} = \mathscr{L}_{x_o}, \mathscr{L}_{\mathbb{Q},x_o})$,

– la condition de transversalité de Griffiths est satisfaite : $\nabla F^pL \subset F^{p-1}L \otimes \Omega^1_{X^*}$.

***Théorème 2.1* (Griffiths-Schmid, 1973).** *Si la variation est polarisée, les fibrés F^pL s'étendent de manière naturelle en des fibrés holomorphes F^pM sur X, donc algébriques (GAGA), et la connexion en une connexion méromorphe, qui n'a que des singularités régulières aux points de $D \overset{\text{déf}}{=} X \smallsetminus X^*$.* □

Pour $p \leqslant p_o$ petit, on a $F^pL = F^{p-1}L$ sur X^*, car la filtration est finie sur X^*. Mais les fibrés F^pM étendus à X diffèrent aux points de D, et la filtration est infinie. Les fibrés F^pM sont cependant tous contenus dans le même $\mathscr{O}_X(*D)$-module localement libre $M = \mathscr{O}_X(*D) \otimes F^{p_o}M$. Il est plus facile de décrire M que chacun des F^pM : les sections de M sont celles dont la norme prise dans la métrique du fibré L fournie par la polarisation de la structure de Hodge a une croissance modérée au voisinage de chaque point de D.

Dans notre cas, les fibrés F^pL s'étendent en des fibrés algébriques sur $\mathbb{P}^1$, et si on les restreint à $\mathbb{A}^1$, on peut les considérer comme des $\mathbb{C}[t]$-modules libres, si t est la coordonnée sur $\mathbb{A}^1$. On a donc, pour tout p,

$$\nabla_{\partial_t} F^pM \subset F^{p-1}M.$$

2.b. Rapide esquisse de la démonstration du théorème de Zucker. Il s'agit dans un premier temps de calculer la cohomologie $H^*(X, j_*\mathscr{L})$ à l'aide de formes différentielles. On sait que la cohomologie $H^*(X^*, \mathscr{L})$ est égale à l'hypercohomologie du complexe des formes différentielles méromorphes à pôles en $D \overset{\text{déf}}{=} X \smallsetminus X^*$, c'est-à-dire le complexe de faisceaux

$$M \xrightarrow{\ \nabla\ } \Omega^1_X(*D) \otimes M.$$

On écrit $H^*(X^*, \mathscr{L}) \simeq \mathbb{H}\Big(X, (\Omega^\bullet_X(*D) \otimes M, \nabla)\Big)$. Pour $H^*(X, j_*\mathscr{L})$, on modifie ce complexe en considérant le sous-complexe des *sections* L^2 de ce complexe :

$$M_{(2)} \xrightarrow{\ \nabla\ } (\Omega^1_X(*D) \otimes M)_{(2)}.$$

Il faut se rappeler que L est muni d'une métrique hermitienne (polarisation). On sait donc ce qu'est la norme d'une section de L. Pour donner un sens à la condition L^2, il faut aussi utiliser une métrique sur X^*. On choisit une métrique sur (le fibré tangent de) X^*. Pour les besoins de la théorie de Hodge, on prendra une métrique *complète*. Un bon choix consiste à prendre une métrique qui s'exprime comme une métrique de Poincaré au voisinage de chaque point de D. Une telle métrique étant choisie, on peut aussi mesurer les sections de $\Omega^1_{X^*}$ et donc celles de $\Omega^1_{X^*} \otimes L$, puis déterminer si la norme de ces sections est L^2.

On a donc $H^*(X, j_*\mathscr{L}) \simeq \mathbb{H}\Big(X, (\Omega^\bullet_X(*D) \otimes M)_{(2)}, \nabla\Big)$.

On peut voir que les fibrés F^pM et $\Omega^1_X \otimes F^pM$ (que je n'ai pas définis précisément) sont contenus dans les termes correspondants du complexe L^2, ce qui le filtre, et permet de définir une filtration sur $H^*(X, j_*\mathscr{L})$. Zucker montre que celle-ci est bien une structure de Hodge polarisée.

La condition L^2 est utile pour appliquer la théorie de Hodge dans le cas d'une métrique complète (sur X^*) avec le laplacien associé à la connexion ∇ et la métrique hermitienne sur L.

2.c. Torsion exponentielle. On revient à la situation où $X = \mathbb{P}^1 = \mathbb{A}^1 \cup \{\infty\}$. Je note t la coordonnée sur $\mathbb{A}^1$. Partant d'une variation F^pL comme plus haut sur X^*, je modifie la connexion ∇ en la remplaçant par $\nabla + \mathrm{Id}\, dt$. C'est complètement inoffensif sur $\mathbb{A}^1$. Mais si $t' = 1/t$ est la coordonnée à l'infini, la connexion est remplacée par $\nabla - dt'/t'^2$ au voisinage de l'infini, et ceci introduit un comportement qui ne préserve pas la condition L^2. On a effectué une « torsion exponentielle », car on peut écrire $\nabla + \mathrm{Id}\, dt = e^{-t} \circ \nabla \circ e^t$ du fait de la condition de Leibniz.

On s'intéresse désormais au complexe L^2 précédent en oubliant la condition L^2 au voisinage de l'infini :

$$M_{(2\neq\infty)} \xrightarrow{\ \nabla + \mathrm{Id}\, dt\ } (\Omega^1_X(*D) \otimes M)_{(2\neq\infty)}.$$

De la même manière, on perd la condition de transversalité de Griffiths à l'infini, le complexe n'est plus filtré comme avant, donc la cohomologie non plus. Quelle structure obtient-on sur la cohomologie ? On peut montrer que ce complexe n'a de cohomologie qu'en degré 1.

Pour faire apparaître cette structure, on interprète la variation de structure de Hodge classique F^pL du point de vue non commutatif, c'est-à-dire qu'on considère la variation de structure de Hodge non commutative $RL = \bigoplus_p F^pL\cdot u^p$, munie de la connexion $\nabla + dt/u = e^{-t/u}\circ\nabla\circ e^{t/u}$. On voit apparaître ici une *transformation de Laplace*, si on pose $\tau = 1/u$.

Théorème 2.2. *Dans ces conditions, la cohomologie H (en degré 1) du complexe L^2*

$$(RM)_{(2_{\neq\infty})} \xrightarrow{\nabla + \mathrm{Id}\, dt/u} (\Omega^1_X[u](*D)\otimes RM)_{(2_{\neq\infty})}.$$

est un $\mathbb{C}[u]$-module libre de rang fini, muni de la connexion $\widehat{\nabla}$ induite par l'action de $\mathrm{d}_u - dt/u^2 = \mathrm{e}^{-t/u}\circ \mathrm{d}_u \circ \mathrm{e}^{t/u}$. Cette connexion est à pôle double en $u = 0$ et à singularité régulière en $u = \infty$. La métrique L^2 obtenue sur la cohomologie L^2 via la métrique de L fait de ce module une $\mathbb{C}$-structure de Hodge non commutative.

Si la variation de structure de Hodge initiale est rationnelle alors, en identifiant le transformé de Laplace topologique (cf. exposé de Morando) du faisceau pervers $j_*\mathscr{L}_{\mathbb{C}}$ à $\operatorname{Ker}\widehat{\nabla}$, le transformé de Laplace topologique du sous-faisceau $j_*\mathscr{L}_{\mathbb{Q}}$ est un $\mathbb{Q}$-réseau $\mathscr{E}_B$ de $\operatorname{Ker}\widehat{\nabla}$, de sorte que $(H, \widehat{\nabla}, \mathscr{E}_B)$ est une structure de Hodge rationnelle non commutative.

La démonstration est analogue à celle de Zucker, mais il faut analyser les propriétés de la métrique au voisinage de l'infini.

Remarque 2.3. On peut se demander si toute structure de Hodge non commutative peut être obtenue de cette manière, à partir d'une variation de structure de Hodge polarisée sur $\mathbb{A}^1$ privé d'un certain nombre de points. Il faut d'abord remarquer que ce procédé fournit une structure de Hodge non commutative *polarisée* (notion qu'on n'a pas définie), et que le procédé ne fonctionne *a priori* pas sans polarisation. De plus, même en ne considérant que les structures polarisées, celles qui sont obtenues ont une propriété particulière : elles restent des structures de Hodge non commutatives (polarisées) après *changement d'échelle*. Cette propriété (qu'on n'a pas définie non plus) n'est pas satisfaite pour toute structure de Hodge non commutative polarisée. Par contre, on peut montrer (d'après les travaux de Mochizuki, Hertling et Sevenheck notamment), que ce comportement vis-à-vis du changement d'échelle caractérise les structures de Hodge non commutatives polarisées.

3. Structure de Hodge non commutative sur la cohomologie quantique de $\mathbb{P}^n$

Comme indiqué dans l'introduction, on s'intéresse plutôt aux intégrales oscillantes

$$\int_\Gamma e^{F(z)/u}\omega,$$

où $\omega = \dfrac{dz_1}{z_n}\wedge\cdots\wedge\dfrac{dz_n}{z_n}$ et $F(z_1,\dots,z_n) = z_1+\cdots+z_n+1/z_1\cdots z_n$. Il s'agit de les interpréter comme des solutions d'un système d'équations différentielles en u.

Dans l'exposé de JBT, on a associé à F le complexe $K^\bullet$:

$$\cdots\longrightarrow \Omega^k((\mathbb{C}^*)^n)[u,u^{-1}] \xrightarrow{d_z - u^{-1}dF} \Omega^{k+1}((\mathbb{C}^*)^n)[u,u^{-1}]\longrightarrow\cdots$$

On peut écrire $K^\bullet = G^\bullet \otimes_{\mathbb{C}[u^{-1}]} \mathbb{C}[u, u^{-1}]$, où $G^\bullet$ est le complexe

$$\cdots \longrightarrow \Omega^k((\mathbb{C}^*)^n)[u^{-1}] \xrightarrow{\;d_z - u^{-1}dF\;} \Omega^{k+1}((\mathbb{C}^*)^n)[u^{-1}] \longrightarrow \cdots$$

qu'on regarde comme un complexe de $\mathbb{C}[t]$-modules munis d'une connexion : l'action de ∇_{∂_t} est la multiplication par u^{-1} et l'action de $\mathbb{C}[t]$ est déduite de celle sur $\Omega^k((\mathbb{C}^*)^n)$ définie par $\mathbb{C}[-F]$ à l'aide de la règle de Leibniz.

Théorème 3.1. (1) *Pour $k < n$, les $\mathbb{C}[t]$-modules $H^k(G^\bullet)$ sont libres de rang fini.*

(2) *De plus, $M = H^n(G^\bullet) \otimes_{\mathbb{C}[t]} \mathbb{C}[t](*D)$, où $D = \{(n+1)\zeta \mid \zeta^{n+1} = 1\}$ est l'ensemble des valeurs critiques de F, est un $\mathbb{C}[t](*D)$-module libre de rang $n+1$.*

(3) *Le fibré L associé à M sur $\mathbb{A}^1 \smallsetminus D$ est sous-jacent à une variation de structure de Hodge mixte.*

(4) *Tous les gradués de cette variation de structure de Hodge mixte sauf un sont la restriction à $\mathbb{A}^1 \smallsetminus D$ de $\mathbb{C}[t]$-modules libres de rang fini.*

(5) *Le gradué non constant est une variation de structure de Hodge pure polarisée.*

Le système de Gauss-Manin (intéressant) de F est le fibré L sur $\mathbb{A}^1 \smallsetminus D$, muni de la connexion de Gauss-Manin ∇ induite par l'action de ∂_t sur le complexe $G^\bullet$. Le faisceau localement constant $\operatorname{Ker} \nabla = \mathscr{L}$ a pour germe en $t \notin C$ la cohomologie $H^{n-1}(F^{-1}(t), \mathbb{C})$. Il est bien sûr muni d'une $\mathbb{Q}$-structure $H^{n-1}(F^{-1}(t), \mathbb{Q})$.

On interprète donc les intégrales oscillantes comme des solutions du transformé de Laplace du *système de Gauss-Manin* de F.

La transformation de Laplace induit 0 sur $(\mathbb{C}[t], d)$, donc la cohomologie de $H^n(K^\bullet)$ est obtenue par transformation de Laplace d'une variation de structure de Hodge polarisé. Ceci permet d'en déduire :

Théorème 3.2. *La donnée $(H, \mathscr{E}_B, \nabla)$ associée à la cohomologie quantique de l'espace projectif $\mathbb{P}^n$ est une structure de Hodge non commutative (polarisée).*

Remarque 3.3. J'ai passé sous silence un certain nombre de points, notamment le fait que le réseau de Brieskorn de F est bien le fibré sous-jacent à la structure de Hodge non commutative construite par transformation de Laplace.

---

11 novembre 2009

C. Sabbah, UMR 7640 du CNRS, Centre de Mathématiques Laurent Schwartz, École polytechnique, F–91128 Palaiseau cedex, France • *E-mail :* `sabbah@math.polytechnique.fr`
Url : `http://www.math.polytechnique.fr/~sabbah`