USTC - Feuille de TD 8

Introduction à la géométrie algébrique

Exercice 1 Soit k un corps algébriquement clos. Est-ce que les ensembles suivants sont des parties algébriques dans k^2 ?

1) $\{(x,x) \in k^2\}$
2) $\{(x,x) \in k^2 \mid x \neq 0\}$
3) $k^2 \smallsetminus \{(0,0)\}$

Exercice 2 Soit k un corps algébriquement clos. On note $C = \{(t,t^2,t^3) \mid t \in k\}$. Déterminer $I(C)$ et montrer que C est une partie algébrique de k^3.

Exercice 3 Soit $\Gamma = \{(n, 2^n, 3^n) | n \geqslant 1\} \subset \mathbb{Q}^3$. Montrer que Γ est Zariski dense dans $\mathbb{C}^3$.

Exercice 4 Soit k un corps infini. Montrer que la topologie de Zariski sur k^2 n'est pas la topologie produit sur $k \times k$ où k est muni de la topologie de Zariski.

Exercice 5 On travaille sur un corps algébriquement clos k. Calculer l'idéal annulateur de $V(X^2(X-1)^3) \subset k$ dans $k[X]$ et celui de $V(Y(X^2-Y)^9) \subset k^2$ dans $k[X,Y]$. Dans chaque cas, le faire d'abord "à la main", puis avec le Nullstellensatz.

Exercice 6 Soit k un corps algébriquement clos. Soit $J = (X^2+Y^2-1, Y-1) \subset k[X,Y]$.

1) Déterminer l'ensemble $V(J) \subset k^2$.
2) Trouver une fonction $f \in I(V(J))$ telle que $f \notin J$.
3) Déterminer $I(V(J))$.

Exercice 7 Soit $k \subseteq K$ une inclusion de corps algébriquement clos. Montrer qu'un système d'équations polynomiales à coefficients dans k qui a des solutions dans K a aussi des solutions dans k.

Exercice 8 Décrire les espaces topologiques suivants :

$$\mathrm{Spec}(\mathbb{C}), \quad \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[X]/(X^2)), \quad \mathbb{A}^1_{\mathbb{C}} = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[X]),$$
$$\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}} = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[X,Y]), \quad \mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}} = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[X]), \quad \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[[T]]),$$
$$\mathrm{Spec}(\mathbb{C}[X]/(X^2(X^8+1))), \quad \mathrm{Spec}(\mathbb{R}[X]/(X^3+2X^2+2X)),$$
$$\mathbb{G}_{m,\mathbb{C}} = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[T,T^{-1}]), \quad \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[X,Y]/(X^2-Y^2)),$$
$$\mathrm{Spec}(\mathbb{C}[X,Y]/(X^2-X)), \quad \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[X,Y]/(X^2))$$
$$\mathrm{Spec}(\mathbb{C}[X,Y]_{(X,Y)}).$$

Exercice 9 Soient A un anneau commutatif et $J \subsetneq I$ des idéaux de A. On introduit l'idéal $(I : J) = \{a \in A | aJ \subseteq I\}$. Montrer que $V((I : J)) = \overline{V(J) \smallsetminus V(I)}$.

Exercice 10 Soit A un anneau commutatif. Montrer que l'espace topologique $\mathrm{Spec}(A)$ est connexe si, et seulement si, A ne peut pas s'écrire comme produit d'anneaux non nuls.

Exercice 11 Soit A un anneau commutatif. Montrer que l'espace topologique $\mathrm{Spec}(A)$ est quasi-compact, c'est-à-dire que de tout recouvrement ouvert on peut extraire un recouvrement fini.

Exercice 12 On dit qu'un espace topologique est irréductible s'il n'est pas vide et s'il n'est pas réunion de deux fermés stricts. Soit A un anneau commutatif.

1) Montrer que les applications V et I vues en cours induisent une bijection entre les idéaux premiers de A et les fermés irréductibles de $\mathrm{Spec}(A)$.
2) Montrer que $\mathrm{Spec}(A)$ est irréductible si, et seulement si, l'anneau $A/\sqrt{(0)}$ est intègre.

Exercice 13 Soit X un sous-ensemble compact de $\mathbb{R}^n$. On note $C(X, \mathbb{R})$ l'anneau des fonctions continues sur X à valeurs dans $\mathbb{R}$.

1) Montrer que les ensembles $U_f = \{x \in X | f(x) \neq 0\}$ pour $f \in C(X, \mathbb{R})$ forment une base de la topologie de X.

On note $\mathrm{Max}\, C(X, \mathbb{R})$ le sous-ensemble de $\mathrm{Spec}\, C(X, \mathbb{R})$ constitué des points fermés. On rappelle que $x \mapsto \mathfrak{M}_x = \{f \in C(X, \mathbb{R}) | f(x) = 0\}$ induit une bijection ensembliste

$$\varphi : X \xrightarrow{\sim} \mathrm{Max}\, C(X, \mathbb{R}).$$

2) Montrer que, si l'on munit $\mathrm{Max}\, C(X, \mathbb{R})$ de la topologie de Zariski, φ est homéomorphisme.

Exercice 14 Soit A une algèbre de type fini commutative sur un corps. Montrer que les points fermés sont denses dans toute partie fermée de $\mathrm{Spec}(A)$. Le résultat subsiste-t'il si A n'est pas une algèbre de type fini sur un corps ?

Exercice 15 Soit A une $\mathbb{Z}$-algèbre commutative de type fini.

1) Soit $\mathfrak{m}$ un idéal maximal de A. Dans toute la suite, on note $\mathbb{Z} \cap \mathfrak{m}$ l'image inverse de $\mathfrak{m}$ par l'application canonique $\mathbb{Z} \to A$. Montrer que l'anneau quotient $\mathbb{Z}/(\mathbb{Z} \cap \mathfrak{m})$ est soit $\mathbb{Z}$, soit un corps fini.
2) Montrer que le corps $A/\mathfrak{m}$ est une extension finie du corps des fractions de $\mathbb{Z}/(\mathbb{Z} \cap \mathfrak{m})$.
3) Si $\mathbb{Z} \cap \mathfrak{m} = 0$, montrer qu'on arrive à une contradiction. En déduire que le corps $A/\mathfrak{m}$ est fini.
4) Soit $f \in A$ un élément non nilpotent et soit $\mathfrak{n}$ un idéal maximal de l'anneau de fractions (non nul) A_f . Montrer que le corps $A_f/\mathfrak{n}$ est fini.
5) En déduire que $A/(A \cap \mathfrak{n})$ est un corps fini.
6) Montrer que l'intersection de tous les idéaux maximaux de A est $\sqrt{(0)}$.
7) En déduire que les points fermés sont denses dans toute partie fermée de $\mathrm{Spec}(A)$.